Istituzioni di Matematica per FSX − F45

18/2/2015

1.a) La funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2}$ è definita purché $\begin{cases} 3x-2\neq 0 \\ x^2+1\geq 0 \ : \text{SEMPRE!} \end{cases}$ cioè in $(-\infty, 2/3)\cup(2/3,+\infty)$.

In tali intervalli non si annulla mai poiché il numeratore è ≥ 1.
Quindi il suo segno è determinato dal segno del denominatore:

$f(x)<0$ in $(-\infty, 2/3)$

$f(x)>0$ in $(2/3, +\infty)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{3x-2} \overset{\boxed{x<0}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{3x-2} = -\frac{1}{3}$: asintoto orizzontale per $x\to-\infty$ di eq. $y=-1/3$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{3x-2} \overset{\boxed{x>0}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3}$: asint. orizz. per $x\to+\infty$ di eq. $y=\frac{1}{3}$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{3}\pm} f(x) = \frac{\sqrt{13}}{3}\lim_{x\to\frac{2}{3}\pm}\frac{1}{3x-2} = \pm\infty$: asintoto verticale di eq. $x=\frac{2}{3}$

c) $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(3x-2) - 3\sqrt{x^2+1}}{(3x-2)^2} = \dfrac{3x^2-2x-3x^2-3}{(3x-2)^2\sqrt{x^2+1}}$

Quindi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0,f(0))=(0,-\frac{1}{2})$, essendo $f'(0)=\frac{-3}{4}$ è: $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

d) $f'(x)\geq 0 \iff \begin{cases} -2x-3\geq 0 \\ 3x-2\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\leq -3/2 \\ x\neq \frac{2}{3} \end{cases}$

quindi $f'(x)>0$ (e $f(x)$ è crescente) in $(-\infty, -3/2)$

$f'(x)<0$ (e $f(x)$ è decrescente) in $(-3/2, 2/3)$ e in $(2/3, +\infty)$

$f'(x)=0$ (e per i due punti precedenti si ha un punto di MAX REL) se $x=-\frac{3}{2}$

e $f(-\frac{3}{2}) = \dfrac{\sqrt{13/4}}{-9/2-2} = -\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

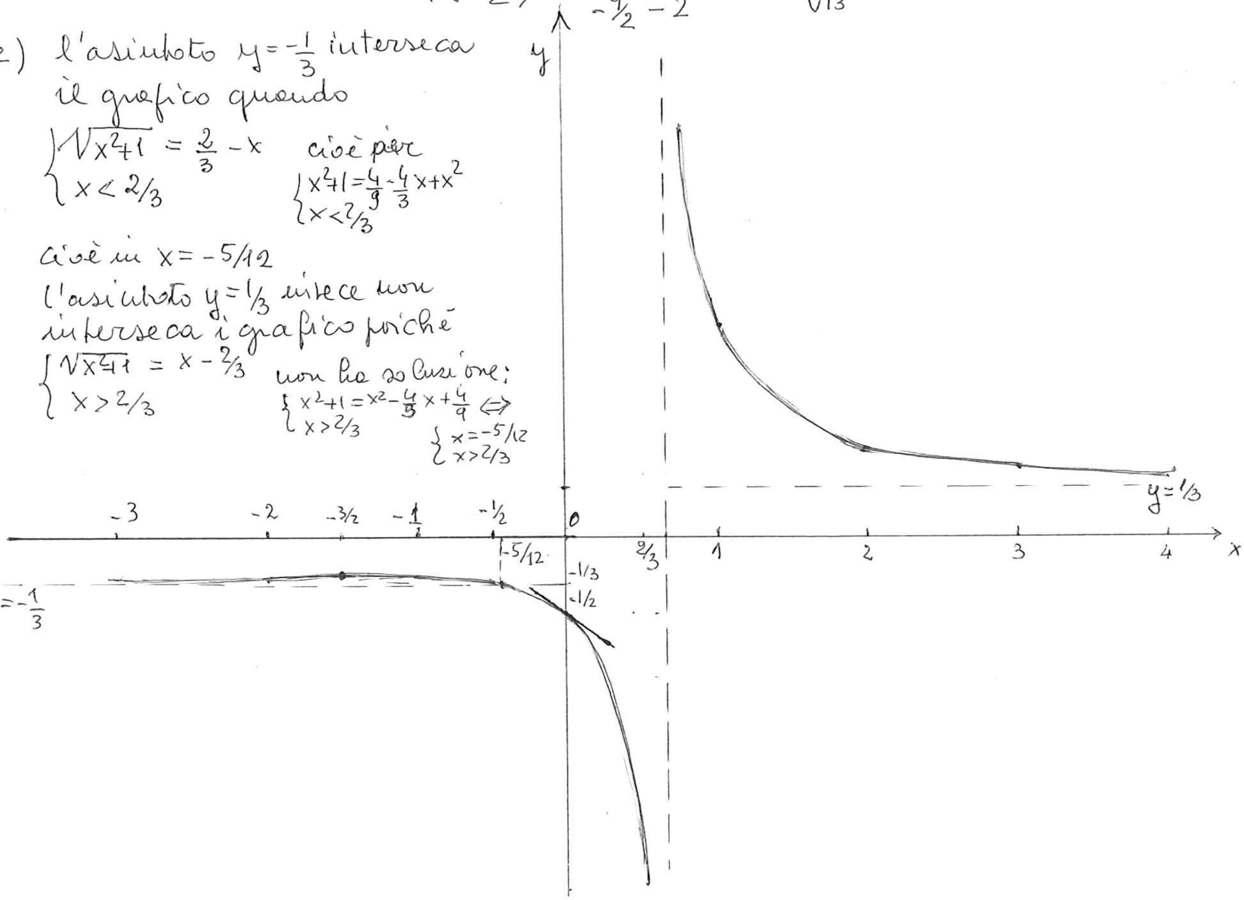
e) l'asintoto $y=-\frac{1}{3}$ interseca il grafico quando

$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = \frac{2}{3}-x \\ x<2/3 \end{cases}$ cioè per $\begin{cases} x^2+1 = \frac{4}{9}-\frac{4}{3}x+x^2 \\ x<2/3 \end{cases}$

cioè in $x=-5/12$

l'asintoto $y=1/3$ invece non interseca il grafico poiché

$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = x-2/3 \\ x>2/3 \end{cases}$ non ha soluzione: $\begin{cases} x^2+1 = x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9} \\ x>2/3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-5/12 \\ x>2/3 \end{cases}$

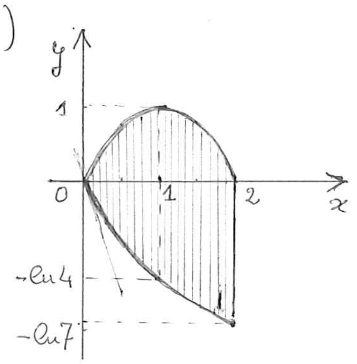


2) $\int (\cos 2x)(2+\operatorname{sen} 2x)^{3/2}dx$ = per sostituzione : $\begin{cases} 2+\operatorname{sen}2x = t \\ 2\cos 2x\, dx = dt \end{cases}$

$= \int \frac{1}{2} t^{3/2} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} t^{5/2} + c = \frac{1}{5}(2+\operatorname{sen} 2x)^{5/2}+c$

Il dominio della funzione integranda è $\{x\in\mathbb{R} \mid 2+\operatorname{sen}2x > 0\}$ cioè tutto $\mathbb{R}$, poiché $\forall x\in\mathbb{R}$ $\operatorname{sen}2x \geq -1 > -2$.
In questo intervallo la funzione integranda è continua e quindi anche le primitive sono definite su $\mathbb{R}$.

3)



- la funzione $f(x) = 2x - x^2$ con dominio $[0,2]$ ha per grafico un arco di parabola concava con vertice in $(1,1)$. Negli estremi si ha $f(0)=f(2)=0$ e in $(0,2)$ si ha $f(x)>0$.
- la funzione $g(x) = -\ln(1+3x)$ con dominio $[0,2]$ ha per grafico un arco dell'opposta di una traslata dilatata di una funzione logaritmica: in particolare si nota che $g(0)=0$, $g(2)=-\ln(7)$ e che la funzione (essendo decrescente) in $(0,2)$ è sempre negativa.

Quindi in $[0,2]$ si ha $f(x) \geq g(x)$ e l'uguaglianza si realizza solo per $x=0$.
Ne segue che la regione R descritta è quella tratteggiata in figura la cui area è
$A = \int_0^2 (f(x)-g(x))dx = \int_0^2 (2x - x^2 + \ln(1+3x))\,dx.$

Calcolo a parte una primitiva di $-g(x)$:

$\int \ln(1+3x)\,dx \underset{\boxed{PP,\ f.f.\ \ln(1+3x)}}{=} x\ln(1+3x) - \int x\cdot\frac{3}{1+3x}dx = x\ln(1+3x) - \int \frac{(1+3x)-1}{1+3x}dx =$

$\underset{\text{per scomposizione}}{=} x\ln(1+3x) - x + \frac{1}{3}\ln(1+3x) + c$

Quindi:

$A = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - x + \left(x+\frac{1}{3}\right)\ln(1+3x)\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} - 2 + \frac{7}{3}\ln 7 - 0 = \frac{7\ln 7 - 2}{3}.$

4) La funzione $\frac{1-\cos t}{\sqrt{t-t^3}}$ è definita per $t-t^3>0$ cioè in $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ ed è continua in ciascuno di questi intervalli, in particolare lo è in $(0,1)$ dove è richiesto di calcolare l'integrale improprio. Inoltre in $(0,1)$ è anche >0.

Notiamo che $\lim_{t\to 0^+} f(t) \underset{\boxed{\text{formula di McLaurin di } \cos t}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{\sqrt{t(1-t)(1+t)}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2/2}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}t\sqrt{t} = 0$

Quindi in un intorno destro di 0 la funzione è limitata e, pur non essendo $f(t)$ definita in $t=0$, si può calcolare un integrale generalizzato, ad es. del tipo $\int_0^{1/2} f(t)dt$, che è sicuramente un numero reale.

Invece $\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1-\cos 1}{\sqrt{2(1-t)}} = +\infty$ (osservare che $\cos 1 < 1$): quindi in un intorno sinistro di 1 la funzione non è limitata e $\int_{1/2}^{1^-} f(t)dt$ è un integrale improprio di 2^a specie.

Si è però visto che $f(t) \sim \frac{1-\cos 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t}}$ (verificare esplicitamente che il $\lim_{t\to 1^-}$ del rapporto di queste due funzioni è 1) e, visto che $\int_{1/2}^{1^-}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{z\to 1^-}\left[-2\sqrt{1-t}\right]_{1/2}^{z} = 2\sqrt{1/2}$ e quindi anche $\int_{1/2}^{1^-}\frac{1-\cos 1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}dt = (1-\cos 1)$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche $\int_{1/2}^{1^-} f(t)dt$. Dunque $\int_0^{1^-} f(t)\,dt = \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_{1/2}^{1^-} f(t)dt$ converge

5) La funzione $f(x,y)=x^4+4x^3y+8x^2+4y^2$ è definita e continua in $\mathbb{R}^2$ essendo un polinomio. Per lo stesso motivo saranno continue in $\mathbb{R}^2$ le sue derivate parziali prime e seconde e quindi si possono applicare i noti teoremi sull'ottimizzazione in 2 variabili.

In particolare i punti critici si hanno in corrispondenza alle soluzioni di $\operatorname{grad} f=(0,0)$. Ora

$f_x(x,y)=4x^3+12x^2y+16x$, $f_y(x,y)=4x^3+8y$

e quindi $\operatorname{grad} f=(0,0) \iff \begin{cases} x(x^2+4+3xy)=0 \\ y=-\frac{1}{2}x^3 \end{cases}$ $\boxed{\text{che si spezza nei 2 sistemi}}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+4+3xy=0 \\ y=-\frac{1}{2}x^3 \end{cases}$

Quest'ultimo equivale a $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^3 \\ 3x^4-2x^2-8=0 \end{cases}$ ← la risolvente può essere trattata come una biquadratica:

$\begin{cases} x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{3} \\ x^2\geq 0 \end{cases}$ cioè $x^2=\frac{6}{3}$, cioè $x=\pm\sqrt{2}$ $\Downarrow$ $y=\mp\frac{1}{2}(\sqrt{2})^3$

Quindi il secondo sistema ha soluzioni $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Ci sono quindi 3 punti critici, che studiamo attraverso l'hessiano:

$$H_f(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12x^2+24xy+16 & 12x^2 \\ 12x^2 & 8 \end{vmatrix}=4\cdot 4\begin{vmatrix} 3x^2+6xy+4 & 3x^2 \\ 3x^2 & 2 \end{vmatrix}$$

Ora

$H_f(0,0)=16\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}>0$ e, poiché $f_{yy}(0,0)=8>0$, risulta che $(0,0)$ è un MINIMO locale forte.

$H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=16\begin{vmatrix} 6-12+4 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=16(-2\cdot 2-6^2)<0$ e quindi $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ è un punto di SELLA

$H_f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e quindi anche $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ è un punto di SELLA.

6) L'equazione differenziale $y''+4y=16e^{2t}$ è ~~del~~ secondo ordine, lineare completa a coefficienti costanti con termine noto continuo $\forall t\in\mathbb{R}$: quindi ogni problema di Cauchy ottenuto aggiungendo le richieste $y(t_0)=y_0$ e $y'(t_0)=y_1$ è risolubile in maniera unica.

A) Risolvo la eq. diff. lin. omogenea associata $z''+4z=0$
La sua eq. caratteristica $r^2+4=0$ ha due sol. immaginarie coniugate $r_{1,2}=\pm 2i$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea ha la forma:

$$z(t)=c_1\cos 2t+c_2\operatorname{sen} 2t \quad \text{ove } c_1,c_2 \text{ variano in } \mathbb{R}.$$

B) Trovo una soluzione particolare tra le funz. della forma $\bar{y}(t)=ke^{2t}$ (visto che non sono soluzioni dell'omogenea associata). Poiché: $\bar{y}'=2ke^{2t}$, $\bar{y}''=4ke^{2t}$, sostituendo si ha

$$4ke^{2t}+4ke^{2t}=16e^{2t}$$

cioè, semplificando e^{2t}:

$$8k=16 \implies k=2$$

Quindi una sol. particolare è $\bar{y}(t)=2e^{2t}$

C) ne segue che l'integrale generale della completa è $y(t)=2e^{2t}+c_1\cos 2t+c_2\operatorname{sen} 2t$

D) Per risolvere il probl. di Cauchy $\begin{cases} y''+4y=16e^{2t} \\ y(0)=3 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

derivo l'integrale gen: $y'(t)=4e^{2t}-2c_1\operatorname{sen} 2t+2c_2\cos 2t$ e sostituisco i valori in

$y(t)$ e $y'(t)$:

$$\begin{cases} 2\cdot e^0 + c_1\cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 3 \\ 4e^0 - 2c_1 \operatorname{sen} 0 + 2c_2\cos 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 3-2 \\ 2c_2 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Quindi la sol. del probl. di Cauchy è $\quad y(t) = 2e^{2t} + \cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t$.

7) Un vettore ortogonale a $\underline{u} = (2,0,-1)$ e a $\underline{v} = (1,3,5)$ è dato dal loro prodotto vettoriale

$$\underline{u}\wedge\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(0+3) - \underline{j}\,(10+1) + \underline{k}\,(6+0) = (3,-11,6)$$

L'equazione del piano passante per $O=(0,0,0)$, $B=(2,0,-1)$, $C=(1,3,5)$ ha la forma $a(x-0)+b(y-0)+c(z-0)=0$ ove il vettore $\underline{w}=(a,b,c)$ è ortogonale a $\vec{OA} = (2,0,-1) = \underline{u}$ e a $\vec{OB} = (1,3,5) = \underline{v}$ e quindi si può prendere $\underline{w} = \underline{u}\wedge\underline{v}$.

Quindi l'eq. del piano è $\quad 3x - 11y + 6z = 0$.

8) Il numero complesso $W = -8 + 8\sqrt{3}\,i$ ha modulo $|W| = 8\sqrt{1+3} = 16$ e argomento principale θ tale che $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Quindi le sue radici quarte hanno modulo $|z_k| = \sqrt[4]{16} = 2$ e argomento principale $\theta_k = \frac{2\pi}{3\cdot 4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ con $k = -2,-1,0,1$

($\Rightarrow \theta_{-2} = -\frac{5\pi}{6}$, $\theta_{-1} = -\frac{\pi}{3}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$) e sono a due a due opposte.

Esse hanno la forma $z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ e quindi scritte in forma algebrica sono:

$z_{-1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i \quad \Longrightarrow z_1 = -z_{-1} = -1+\sqrt{3}i$

$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i \quad \Longrightarrow z_{-2} = -z_0 = -\sqrt{3} - i$