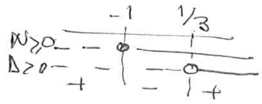
Istituzioni di Matematica per FSX. Prova del 19/4/2013 (1)

1. La funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^3+3}{3x-1}}$ è definita purché $\dfrac{3(x^3+1)}{3x-1}\geq 0$, cioè dato che il numeratore $N=3(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$ per $x\geq -1$ e il denomin. $D=3x-1>0$ per $x>\frac{1}{3}$



$f(x)$ è definita in $(-\infty,-1]\cup(1/3,+\infty)$.
Inoltre $f(x)=0 \iff N=0 \iff x=-1$
e per ogni altro $x\in(-\infty,-1)\cup(1/3,+\infty)$ si ha $f(x)>0$ in quanto un radicale, ove definito, non può mai essere <0.

2. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)=0$ poiché $f(x)$ è continua da sinistra in $x=-1$

$\lim_{x\to 1/3^+} f(x) = \lim_{x\to 1/3^+} \dfrac{\sqrt{3+1/9}}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$: c'è un asintoto verticale di eq.: $x=1/3$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{3x^3(1+1/x^3)}{3x(1-1/3x)}} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2} = +\infty$

3. Gli asintoti a $+\infty$ e a $-\infty$ (se esistono) sono obliqui poiché la funzione è divergente.
I conti appena fatti dicono che $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & (a+\infty) \\ -1 & (a-\infty)\end{cases}$

Ora $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{(f(x))^2-x^2}{f(x)+x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3x^3+3}{3x-1}-x^2}{|x|+x} =$ $|x|=x$ essendo $x>0$

RAZIONALIZZO

$= \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{(3x-1)\cdot 2x} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow$ asintoto obliquo per $x\to+\infty$: $y=x+\frac{1}{6}$

Invece $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{(f(x))^2-x^2}{f(x)-x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{(3x-1)(|x|-x)} =$ $|x|=-x$ essendo $x<0$

$= \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{-2x(3x-1)} = -\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow$ asintoto obliquo per $x\to-\infty$: $y=-x-\frac{1}{6}$.

4. $f'(x) = \dfrac{1}{2f(x)}\cdot 3\cdot\dfrac{3x^2(3x-1)-3(x^3+1)}{(3x-1)^2} = \dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{3x-1}{3(x^3+1)}}\cdot\dfrac{2x^3-x^2-1}{(3x-1)^2}$

Se $x=1$, $f(1)=\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$, $f'(1)=0 \Rightarrow$ eq. della tangente al grafico in $(1,\sqrt{3})$ è $y=\sqrt{3}$.

Se $x=-1$, $f'(-1)$ non è definita ma $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \frac{9}{2}\cdot(+\infty)\cdot\frac{-4}{16} = -\infty \Rightarrow$ quindi l'eq della retta tangente in $(-1,0)$ è $x=-1$.

5. Al punto precedente abbiamo visto che $f'(x)$ è definita in $(-\infty,-1)\cup(1/3,+\infty)$ e ha uno zero in $x=1$. Cerchiamo gli eventuali altri con il metodo di Ruffini (scomponendo)

	2	−1	0	−1
1		2	1	1
	2	1	1	1

$\Rightarrow 2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)$: poiché il discriminante di $2x^2+x+1$ è $\Delta=1-8<0$, il polinomio $2x^3-x^2-1$ non ha altre radici.

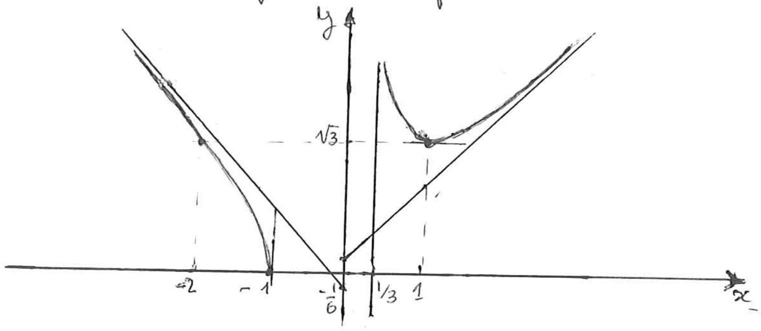
Dato che tutti i fattori della derivata: $\frac{9}{2}$, $\sqrt{\dfrac{3x-1}{3(x^3+1)}}$, $\dfrac{2x^2+x+1}{(3x-1)^2}$ sono positivi ove definiti si ha:

$$f'(x)>0 \iff \begin{cases} x-1>0 \\ x\in(-\infty,-1)\cup(1/3,+\infty) \end{cases} \quad \text{cioè}$$

$f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)$ oppure $x\in(1/3,1)$: su tali intervalli $f(x)$ decresce

$f'(x)>0 \iff x\in(1,+\infty)$: su tale intervallo $f(x)$ cresce

Quindi in $(1,\sqrt{3})$ la funzione presenta un minimo relativo.



$f(-2)=\sqrt{3}$

2. $\displaystyle\int 2x\cdot\cos(2x+1)\,dx \underset{\text{pp con FF: }x}{=} x\,\mathrm{sen}(2x+1)-\int 1\cdot\mathrm{sen}(2x+1)\,dx =$

$= x\,\mathrm{sen}(2x+1)+\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c$

(N.B.: l'integranda è continua su tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ le primitive sono def. su $\mathbb{R}$)

Tra queste primitive quella che in $x=0$ vale 1 soddisfa l'equazione

$$0\cdot\mathrm{sen}\,1+\frac{1}{2}\cos 1+C=1$$

cioè $c=1-\frac{1}{2}\cos 1$. Quindi la primitiva cercata è

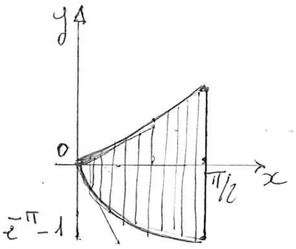
$$x\,\mathrm{sen}(2x+1)+\frac{1}{2}\cos(2x+1)+1-\frac{1}{2}\cos 1.$$

3. $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ su $I=[0,\frac{\pi}{2}]$ ha per grafico un arco di tangente di periodo 2π. La funzione è continua, positiva in $(0,\frac{\pi}{2}]$ e crescente; $f(0)=0$, $f(\frac{\pi}{2})=1$.

$g(x)=e^{-2x}-1$ su $I=[0,\frac{\pi}{2}]$ ha per grafico un arco dell'esponenziale decrescente e^{-2x}, traslato di 1 unità nella direz. dell'asse y e verso opposto ad esso. Ne segue che $g(x)$ è decrescente, negativa in $(0,\frac{\pi}{2})$; $g(0)=0$, $g(\frac{\pi}{2})=e^{-\pi}-1$.

Quindi in I si ha sempre $f(x)\geq g(x)$ (e vale $=$ solo in $x=0$)

(Per un tracciamento ragionevole dei due grafici osservare che in $(0,0)$ la tangente al grafico di $f(x)$ ha eq. $y=x/2$, quella al grafico di $g(x)$ ha eq. $y=-2x$).



Quindi la regione richiesta è quella tratteggiata, la cui area è $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(f(x)-g(x))\,dx$.

Ora $\displaystyle\int\left(\tan\frac{x}{2}\right)dx=-2\int\frac{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\,dx=-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+c_1$

$\displaystyle\int(e^{-2x}-1)\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}-x+c_2$

Quindi Area $=\left[-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}e^{-2x}+x\right]_0^{\pi/2}=-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{\pi}{2}+2\ln 1-\frac{1}{2}e^{0}-0=$

$=\ln 2+\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

4. $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+3t)}$ è definita (e continua) in $(0,+\infty)$ poiché in tale intervallo lo è il numeratore e il denominatore non si annulla (si annullerebbe per $t=0$) e il logaritmo avendo argomento >1 è sempre definito. In tale intervallo la funzione è positiva e quindi si possono applicare i vari criteri per stabilire se un integrale improprio converge.

$\int_{0^+}^{4} f(t)\,dt$

è davvero un integrale di 2ª specie poiché per $t\to 0^+$, $f(t)\sim\frac{\sqrt{t}}{3t}=\frac{1}{3\sqrt{t}}$: quindi $f(t)$ non è limitata in $(0,4]$. Però visto che è asintotica a $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$ e si sa che $\int_{0^+}^{4}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge (a 4) e quindi anche $\int_{0^+}^{4}\frac{dt}{3\sqrt{t}}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{0^+}^{4} f(t)\,dt$ converge.

5. $f(x,y)=3x^2y+xy^2-5x^2-y^2$ è continua su $\mathbb{R}$ con derivate parziali di ogni ordine in $\mathbb{R}$ continue poiché si tratta di polinomi. Si può quindi usare gradiente (per localizzare i punti critici) ed hessiano (per studiarli).

$f_x(x,y)=6xy+y^2-10x$

$f_y(x,y)=3x^2+2xy-2y$

ho punti critici per gli (x,y) t.c. $\begin{cases} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases}$

Il testo afferma che c'è un punto di ascissa -2 tale che

$\text{grad}\, f(2,y)=(f_x(-2,y),f_y(-2,y))=(0,0)$

Verifichiamolo: $\begin{cases}-12y+y^2+20=0\\ 12-4y-2y=0\end{cases}$ $\begin{matrix}\Rightarrow (y-2)(y-10)=0\\ \Rightarrow y=2\end{matrix}$ è soluzione anche della prima equazione

Quindi $A=(-2,2)$ è un punto critico.

Ora $H_f(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6y-10 & 6x+2y\\ 6x+2y & 2x-2\end{vmatrix}$

quindi $H_f(-2,2)=\begin{vmatrix} 2 & -8\\ -8 & -6\end{vmatrix}<0$ e di conseguenza $(-2,2)$ è un punto di sella.

Il testo non richiede di determinare gli altri punti critici. Vediamo però come si può fare: dopo aver osservato che la 2ª eq. non si annulla per $x=1$ ricavo

$$\begin{cases}6xy+y^2-10x=0\\ y=\frac{3x^2}{2(1-x)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{9x^3}{1-x}+\frac{9x^4}{4(1-x)^2}-10x=0\\ y=\frac{3x^2}{2(1-x)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}36x^3-36x^4+9x^4-40(1-2x+x^2)x=0\\ y=\frac{3x^2}{2(1-x)}\end{cases}$$

Si evidenzia una soluzione $(x,y)=(0,0)$ ... che si poteva leggere anche a occhio. Notare che $H_f(0,0)=-10\cdot(-2)>0$ e quindi $(0,0)$ è un estremante locale forte (MAX, poiché $f_{xx}(0,0)<0$). Resta il sistema:

$\begin{cases}-27x^3-4x^2+80x-40=0\\ y=\frac{3x^2}{2(1-x)}\end{cases}$

Si è visto sopra che $x=-2$ è soluzione (della 1ª eq.) $\Rightarrow$ scompongo con Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 27 & 4 & -80 & 40\\ -2 & & -54 & 100 & -40\\ \hline & 27 & -50 & 20 & 0\end{array}$$

ora $27x^2-50x+20=0$ ha soluz. $\frac{25\pm\sqrt{25^2-20\cdot 27}}{27}=\frac{25\pm\sqrt{5(125-108)}}{27}=\frac{25\pm\sqrt{85}}{27}$

Corrispondentemente la 2ª equazione dà i valori delle ordinate dei punti (1 per ciascuna x, visto che y è funzione di x).

6. $y'(t) = -\frac{4}{t}(y(t))^3$ è un'eq. diff. del 1° ordine a variabili separabili
$a(t) = \frac{4}{t}$ è continua in ciascuno dei 2 intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$
$b(y) = -y^3$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Ne consegue che esiste 1 e 1 sola sol. del problema di Cauchy $y(t_0)=y_0$ per ogni $(t_0,y_0) \in \{(-\infty,0) \cup (0,+\infty)\} \times \mathbb{R}$ e la soluzione sarà definita in un sottoins. di quello dei due intervalli, tra $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ cui appartiene t_0.
Nella fattispecie visto che $t_0 = 1$, la sol. sarà def. in un sotto intervallo di $(0,+\infty)$.
Osservo che $b(y)=0$ per $y=0$ che quindi è sol. dell'eq. diff., ma non del problema di Cauchy.
Separo le variabili

$$\int -\frac{1}{y^3}\,dy = \int \frac{4}{t}\,dt \iff \frac{1}{2y^2} = 4\ln|t| + c$$

tengo presente che $t_0 > 0$, quindi t varia in $(0,+\infty) \Rightarrow |t| = t$.
Inoltre la condiz. di Cauchy dice: $\frac{1}{2(-1)^2} = 4\ln 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$
Quindi la soluzione in forma implicita è $\frac{1}{y^2} = 8\ln t + 1$
o anche: $y^2 = \frac{1}{8\ln t + 1}$.
Poiché $y(1) = -1 < 0$ si dovrà scegliere la soluzione negativa, cioè la sol. in forma implicita è

$$y = \frac{-1}{\sqrt{8\ln t + 1}}$$ e deve essere $8\ln t + 1 > 0$ cioè $t > e^{-1/8}$

cioè il dominio della soluzione è $(e^{-1/8}, +\infty)$, mentre l'immagine è $(-\infty, 0)$.

7. Un piano passante per $A = (1,0,1)$ ha equazione del tipo

$$a(x-1) + by + c(z-1) = 0.$$

Se passa per $B = (0,2,3)$ si dovrà avere: $-a + 2b + 2c = 0$
Se è $\perp$ al piano di eq. $x - y = 0$ che ha vettore direzione $(1,-1,0)$ si dovrà avere $(1,-1,0) \cdot (a,b,c) = 0$. Mettendo a sistema le due condizioni si ha:

$$\begin{cases} -a + 2b + 2c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ b = -2c \end{cases} \iff (a,b,c) = (-2k,-2k,k)$$. Sol es. per $k = -1$:

$$2(x-1) + 2y - (z-1) = 0$$

8. Il numero complesso $z = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{3 + 3\sqrt{3}i}$ è rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ di due numeri tali che $|\alpha| = 4$, argomento princ. di $\alpha = -\frac{\pi}{4}$
$|\beta| = 6$, argomento princ. di $\beta = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{2}{3}$, $\arg_{pr.} \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Di qui si può ricavare la forma algebrica, ma è più comodo:

$$z = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{(2\sqrt{2})(1-i)\cdot 3(1-\sqrt{3}i)}{9+27} = \frac{\sqrt{2}}{6}(1 - i - \sqrt{3}i - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}i.$$