CAUTELE

$$\log_2(x(x-1)) \overset{(*)}{=} \log_2 x + \log_2(x-1) \ ?$$

Osservo che

$\log_2(x(x-1))$ è definita $\iff x(x-1)>0 \iff$

$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Invece

$\log_2 x + \log_2(x-1)$ è definita $\iff$ sono definiti entrambi gli addendi contemporaneamente:

$$\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \iff x \in (1, +\infty)$$

Quindi l'uguaglianza (*) è <u>falsa</u>. Per correggerla:

$$\log_2(x(x-1)) = \begin{cases} \text{se } x>1: = \log_2 x + \log_2(x-1) \\ \text{se } x<0: = \log_2(-x) + \log_2(1-x) \end{cases}$$

↑

Infatti

$x(x-1) = (-x)(1-x)$ e nell'intervallo $(-\infty, 0)$:

$-x > 0$

$1-x > 0$

e quindi vale la proprietà

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y \qquad (\text{valida per } \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix})$$

$\log_2 x^2 = 2\log_2|x|$ Infatti

se $x>0$ applico la proprietà: $\log_2 x^2 = 2\log x$

se $x<0$, $-x>0$ $\quad$ " $\quad \log_2 x^2 = 2\log(-x)$

$x^2 = (-x)^2$

Unisco le due scritture dicendo che

$\forall x \neq 0 \quad \log_2 x^2 = 2\log_2|x|$

(R11 bis)

DIMOSTRO che $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (*)

So che $\log_a z$ (per ogni $z \in (0,+\infty)$) è l'esponente da dare ad a per ottenere z. (l'esponente è unico)

Se mostro che $a^c = z = a^d$ mostro che $c = d$

$a^{\log_a(xy)} = xy$ ← per def. di logaritmo

$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$

e quindi vale (*)

DIMOSTRO che $\log_a 1 = 0$

Stessa considerazione fatta sopra: è equivalente a mostrare che $a^{\log_a 1} = a^0$ .....

DIMOSTRO che $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$:

So che $y \cdot \frac{1}{y} = 1$. Applico le due proprietà preced.:

$0 = \log_a 1 = \log_a\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a y + \log_a \frac{1}{y}$ ....

DIMOSTRO che $\log_a(x^c) = c \log_a x$

Stessa considerazione fatta sopra: è equivalente a mostrare che $a^{\log_a(x^c)} = a^{c \log_a x}$

$a^{\log_a(x^c)} = x^c$

$a^{c \cdot \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^c = (x)^c = x^c$

DIMOSTRO che $(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$

Stesse considerazioni fatte sopra: equivale a dimostrare che

$$a^{(\log_a b)(\log_b x)} = a^{\log_a x}$$

$$a^{(\log_a b)(\log_b x)} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Questa, che si chiama legge del cambiamento di base, si può anche riscrivere

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

DIMOSTRO che $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$: $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\log_a x} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x$$

DIMOSTRO che se $x \neq 1$ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

usando la legge del cambiamento di base:

$$(\log_a x)(\log_x a) = \log_a a = 1.$$

ES: $\log_2 e = \frac{1}{\log_e 2}$

Cardinalità dei numeri

Abbiamo visto che

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità (anche se $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$) perché $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ (cioè gli elem. di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possono essere "elencati"): cardinalità del numerabile

invece i numeri reali non sono in corr. biunivoca con $\mathbb{N}$. (TEOR di CANTOR)

DIM Supponiamo che si possa fare un "elenco" contenente tutti i numeri reali (ovviamente elenco infinito, come $\mathbb{N}$):

$x_1 = N_1, a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$

$x_2 = N_2, a_2 b_2 c_2 d_2 \ldots$

$x_3 = N_3, a_3 b_3 c_3 d_3 \ldots$

⋮

all'∞

La cardinalità dei numeri reali si dice cardinalità del continuo

Ora considero questo allineam. decimale $N, a b c d \ldots$:

se $N_1 = 0$ prendo $N = 1$ $\Rightarrow N \neq N_1$

$N_1 \neq 0$ " $N = 0$

se $a_2 \in \{0, \ldots, 4\}$ prendo $a = 5$ $\Rightarrow a \neq a_2$

$a_2 \in \{5, \ldots, 9\}$ " $a = 4$

se $b_3 \in \{0 \ldots 4\}$ " $b = 5$ $\Rightarrow b \neq b_3$

$b_3 \in \{5, \ldots 9\}$ " $b = 4$

e così via. In questo modo trovo un numero $N, abcd \ldots$ reale (allineamento decimale, senza periodo 9) che è diverso da ciascuno degli elementi nell'elenco per almeno una cifra: quindi è un numero reale che non sta nell'elenco: ASSURDO!