ESERCIZIO a Richiesta.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2}-1\right] = [\infty\cdot 0] =$$

LIM. NOTEVOLE per $\{b_n\}\to 0$

$$\left\{\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n}\right\}\to t$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-1/n\right)^{3/2}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$b_n = -\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \boxed{\frac{\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{3/2}-1}{-\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0^-$$

---

oppure osservo che se $\{b_n\}\to 0$ $t\in\mathbb{R}$

$(1+b_n)^t - 1 \sim t b_n$, pongo: $b_n = -\frac{1}{n}$

e quindi ho

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2}-1\right] = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cdot\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 0^-$$

---

oppure ricordo che

(*) $(1+b_n)^t = 1 + t b_n + o(b_n)$ se $\{b_n\}\to 0$

cioè nella successione data sostituisco

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ e proseguo nel calcolo...

La scrittura (*) è facile da ricordare (più del limite notevole o dell'asintotico), perché se $t\in\mathbb{N}$, $t>1$ corrisponde a "iniziare" lo sviluppo del binomio. Se scrivo b (invece di b_n) ho

$(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$ e se $|b| \ll 1$: b^2 è trascurabile rispetto a b

$(1+b)^3 = 1 + 3b + b^2(3+b)$ e se $|b| \ll 1$: $b^2(3+b)$ è " " a b

ecc. Qui si "generalizza" con $t\in\mathbb{R}$ qualunque.