Esercizi assegnati:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\tan 2(3-x)}{x-3} = \frac{\tan 0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \boxed{x-3=t} \Rightarrow 3-x=-t$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\tan(-2t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\tan 2t}{t} \overset{*}{=} \lim_{t\to 0} -2\cdot \underbrace{\boxed{\frac{\tan 2t}{2t}}}_{\to 1} =$$

$$= -2$$

In alternativa $\tan z = z + o(z)$ se $z \to 0$

$z = 2t$ per $t \to 0$: $z \to 0$

e quindi in $*$ vado avanti come $\lim_{t\to 0} \frac{-2t+o(t)}{t} = -2$

In alternativa usare l'approssimazione fin dall'inizio,

cioè

se $x \to 3$ $\quad 2(3-x) \to 0$

quindi $\tan 2(3-x) = 2(3-x) + o(3-x)$

Sostituisco

$$\lim_{x\to 3} \frac{\tan 2(3-x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2(3-x)+o(3-x)}{x-3} = -2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{e^{2x-1}-1}{2x^2-x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{e^{2x-1}-1}{x(2x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Utilizzo il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

$t = 2x-1 \to 0$ per $x \to \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1/2} \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 2} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{e^{2x-1}-1}{2x-1}}}_{\to 1} = 2$$

Posso anche ricordare che per $\boxed{t\to 0}$ $e^t-1 = t + o(t)$

cioè $\boxed{e^t = 1+t+o(t)}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2} - x$ I.D. R poiché $\sqrt[3]{x}$ è def anche per $x<0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [\infty-\infty] =$$

$\boxed{(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+o(t) \text{ se } t\to 0}$

$t = -1/x$, $\alpha = 1/3$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{3}+o(1) = -\frac{1}{3}$$

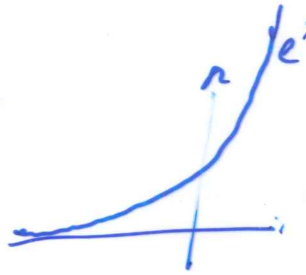
asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{3}$

A CASA: calcolare il limite per $x \to -\infty$ della stessa funzione

$f(x) = \ln\left(1+2e^{x/2}\right)$

I.D. $1+2e^{x/2} > 0$ sempre! anzi $1+2e^{x/2} > 1$

(quindi $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)



Poiché I.D. $= \mathbb{R}$, i suoi estremi sono $+\infty$ e $-\infty$.

Qui calcolo i limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$$

per $x \to -\infty$ $f(x)$ ha un asintoto orizzontale: $y=0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Vedendo come ho calcolato il limite ipotizzo un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[2e^{x/2}\left(1+\frac{1}{2e^{x}}\right)\right]}{x} =$$

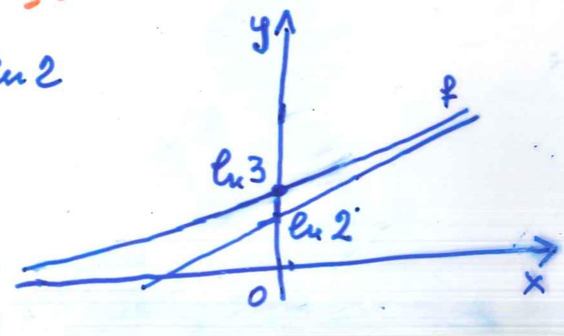
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2e^{x/2} + \underbrace{\ln\left(1+\underbrace{\frac{1}{2e^{x/2}}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 + \ln e^{x/2} + 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 0 + \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2} = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+2e^{x/2}\right) - \ln e^{x/2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\underbrace{\boxed{\frac{1}{e^{x/2}}}}_{\to 0} + \frac{2e^{x/2}}{e^{x/2}}\right) = \ln 2 = q$$

Asintoto per $x \to +\infty$: $y = \frac{1}{2}x + \ln 2$



È sempre crescente perché
$1+2e^x$ è crescente ed è composta con
$\ln t$ che pure è crescente.