Esercizio pag D26 n. 4

$f(x) = 4x - (x+1)\ln\left[(x+1)^2\right]$ Studiare.

I.D. $(x+1)^2 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

limiti negli estremi

$\lim_{x \to -1} f(x) = -4 - 2(x+1)\ln|x+1| = [0 \cdot \infty] = -4$

per studiare $\lim_{x \to -1} (x+1)\ln|x+1| = \left\{\begin{array}{l}\text{sost.}\\ x+1=t\end{array}\right.$

$= \lim_{t \to 0^{\pm}} t \ln|t| = \lim_{\substack{t=\frac{1}{z}\\ z \to \pm\infty}} \frac{1}{z}\ln\frac{1}{|z|} =$

$= \lim_{z \to \pm\infty} \frac{-\ln|z|}{z} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} 4x - 2(x+1)\ln|x+1| = \lim_{x \to +\infty} 4x - 2x\ln(x) =$

$= [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} 2x(2 - \ln x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x - 2x\ln(-x) =$

$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{-2x}_{\downarrow\, +\infty}(\underbrace{\ln(-x)}_{\downarrow\, +\infty} - 2) = +\infty$

Monotonia: $f'(x) = 4 - \left(\ln(x+1)^2 + \underbrace{(x+1)\frac{2(x+1)}{(x+1)^2}}_{=2}\right)$

$= 2 - \ln(x+1)^2$

$f'(x) = 2 - \ln(x+1)^2 \geq 0$

$\ln(x+1)^2 \leq 2$

$\iff \begin{cases}(x+1)^2 \leq e^2 \iff -e \leq x+1 \leq e\\ x \neq -1\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x \in (-e-1, e-1)\\ x \neq -1\end{cases}$

$f(x)$ cresce in $(-e-1, -1)$ e in $(-1, e-1)$

$f(x)$ decresce in $(-\infty, -e-1)$ e in $(e-1, +\infty)$

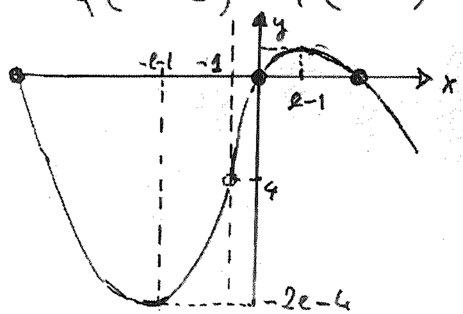
$f(x)$ ha un min. rel in $x = -e-1$

MAX rel in $x = e-1$

$f(e-1) = 4(e-1) - (e-1+1)\ln(e-1+1)^2 =$

$= 4(e-1) - 2e\ln e = 2e - 4 > 0$

$f(-e-1) = 4(-e-1) + 2e\ln e = -2e - 4 < 0$



N.B. $f(0) = 0 - 1 \cdot \ln 1 = 0$

$f(-e^2-1) = -4e^2 - 4 + e^2\ln(e)^4 = -4 < 0$

$f(-e^3-1) = -4e^3 - 4 + e^3\ln e^6 = 2e^3 - 4 > 0$

uno zero sta tra $-e^3-1$ e $-e^2-1$

$f(e^2-1) = 4e^2 - 4 - e^2\ln(e^4) = -4 < 0$

uno zero è tra $e-1$ e e^2-1.

Concludendo: Visto che la funzione

per $x \to -\infty$ tende a $+\infty$, mentre $f(-e-1)<0$

e nell'intervallo $(-\infty, -e-1)$ è monotona (decrescente)

in tale intervallo ammette certamente uno e un sol zero α

(che abbiamo verificato cadere nell'intervallo

$(-e^3-1, -e^2-1)$).

Visto che

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -4 < 0$ (e quindi in un punto $-1+\varepsilon$ abbastanza vicino a -1 la funzione è <0; permanenza del segno)

e $f(e-1)>0$ e visto che in $(-1, e-1)$ la funz è crescente in tale intervallo la funzione ha 1 e 1 sol zero che abbiamo visto essere in $x=0$

Visto che

$f(e-1)>0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e visto che in $(e-1, +\infty)$ la funzione è decrescente, in tale intervallo ammette uno e un solo zero β, che abbiamo visto cadere nell'intervallo $(e-1, e^2-1)$

Di conseguenza

$f(x)>0$ per $x \in (-\infty, \alpha)$ e per $x \in (0, \beta)$

$f(x)<0$ per $x \in (\alpha, -1)$ e per $x \in (-1, 0)$ e per $x \in (\beta, +\infty)$,

Esercizio 9
pag 25

A

$f(x) = x e^{1/x}$

1) $x \neq 0$ perché sia definito l'esponente

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(-x) = -x e^{\frac{1}{-x}} \neq -f(x)$ Nessuna simmetria (rispetto a O o all'asse y)

$\lim_{x \to +\infty} x e^{1/x} = +\infty$ asintoto obliquo ?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+ = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = 1 = q \qquad \boxed{\frac{1}{x} \to 0^+}$$

asintoto per $x \to +\infty$ $\boxed{y = x + 1}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty$ asint. obl. ?

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1^- = m$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = 1 \qquad \boxed{\frac{1}{x} \to 0^-}$$

asintoto per $x \to -\infty$ $\boxed{y = x + 1}$

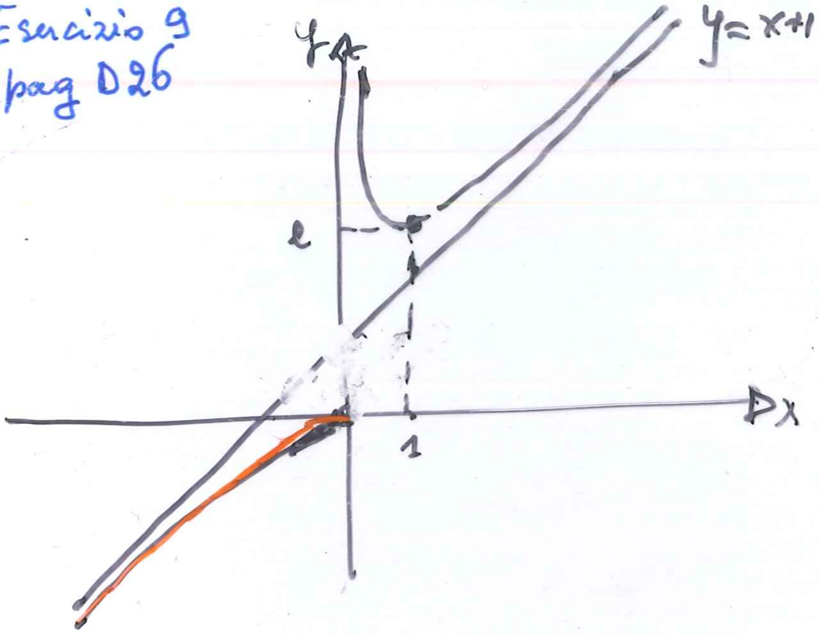
$\lim_{x \to 0^-} x e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = +\infty \qquad \frac{1}{x} \to +\infty$

asint. vert. $x = 0$

Esercizio 9
pag D26

(B)



$$f(x) = x e^{1/x}$$

$$f'(x) = e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$
$$= e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) =$$
$$= e^{1/x} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$e^{1/x} > 0 \quad \forall x \in I.D.$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x-1}{x} \geq 0 \iff$$

$x \in (-\infty, 0)$ oppure $x \in [1, +\infty)$

$f(x)$ cresce in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$

$f(x)$ ha min rel. in $x = 1$ $\quad f(1) = e$

$f(x)$ decresce in $(0, 1)$

Domande lecite!

1) come tende a 0^- la $f(x)$?

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} \cdot \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{1/x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\underset{\boxed{y = \frac{-1}{x}}}{=} \lim_{y \to +\infty} y \cdot e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

2) Il grafico attraversa gli asintoti?

$f(x) = x+1$? $\qquad x e^{1/x} = x + 1$

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x}$$, cioè posto $t = \frac{1}{x}$

quando $e^t = 1 + t$?... solo per $t = 0$, cioè per nessun $x \in \mathbb{R}$.