Es 3 pag D26

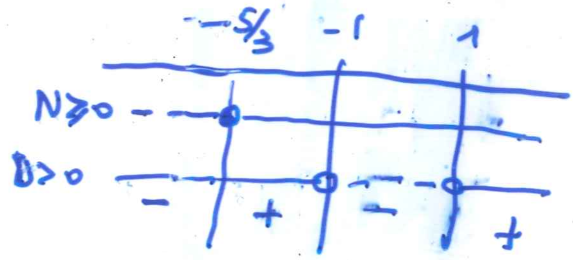
$$f(x)=\frac{3x+5}{x^2-1}$$

I.D. $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$

$f(x)\geq 0$; $f(x)=0 \iff x=-\frac{5}{3}$

$\Updownarrow$

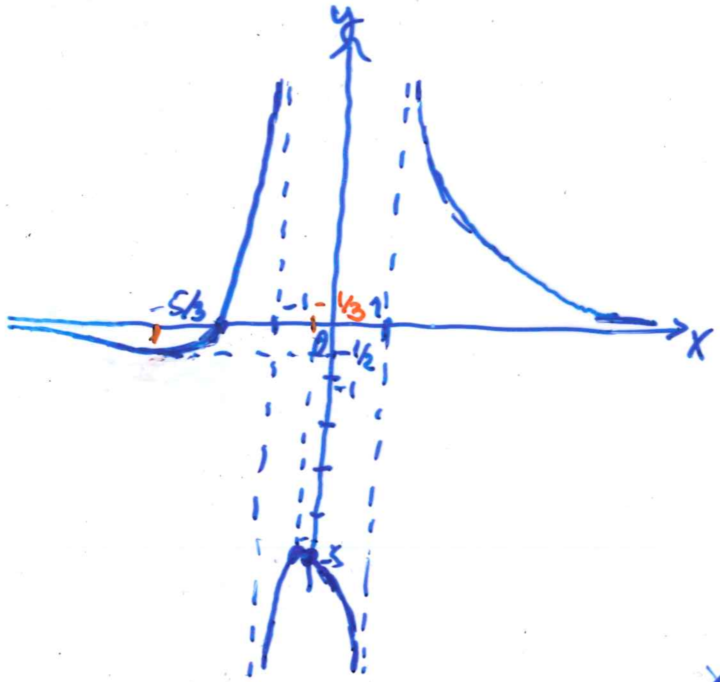
$x\in\left(-\frac{5}{3},-1\right)\cup(1,+\infty)$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$: asintoto orizz. $y=0$ sia per $x\to-\infty$ che per $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^\pm} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^\pm}\frac{2}{-2(x+1)}=\mp\infty$ asint. vert: $x=-1$

$\lim\limits_{x\to1^\pm} f(x)=\lim\limits_{x\to1^\pm}\frac{8}{2(x-1)}=\pm\infty$ asint. vert: $x=1$



$f(0)=\frac{5}{-1}=-5$

$$f'(x)=\frac{3(x^2-1)-2x(3x+5)}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}\geq0$$

nell'I.D. $D>0\Rightarrow f'(x)\geq0\iff$

$$\begin{cases} x\neq\pm1\\ 3x^2+10x+3\leq0\end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-9}}{3}= \begin{cases}-1/3\\ -3\end{cases}$$

Quindi $f'(x)>0$ e $f(x)$ è crescente in $(-3,-1)$ e in $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

$f(x)$ è decrescente in $(-\infty,-3)$ e in $(-1/3,1)$ e in $(1,+\infty)$

in $x=-\frac{1}{3}$ MAX REL $f(-1/3)=-9/2$

in $x=-3$ min rel $f(-3)=-1/2$

Si potrebbero calcolare le rette tangenti in $(-5/3,0)$ e in $(0,-5)$ al grafico

$$f'(x) = -\frac{3x^2+10x+3}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f'(-5/3) = -\frac{-25/3+3}{\left(\frac{25}{9}-1\right)^2} = \frac{16}{3}\cdot\frac{9^2}{16^2} = \frac{27}{16} : \boxed{y = \frac{27}{16}(x+5/3)}$$

$$f'(0) = -3 \quad : \boxed{y+5 = -3x}$$ Sono le 2 tangenti

Es 3 pag D26 segue

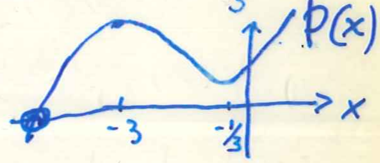
Inoltre:

$$f''(x) = -\frac{(6x+10)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (3x^2+10x+3)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}(2x)}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{2}{(x^2-1)^3}\cdot(3x^3+15x^2+9x+5)$$

$P(x) = 3x^3 + 15x^2 + 9x + 5 \Longrightarrow P' = 9x^2+30x+9 \geq 0$ per $x \leq -3$ e $x \geq -\frac{1}{3}$

Max rel in $x=-3$
min rel in $x=-\frac{1}{3}$



ha almeno 1 zero e dato che:

* $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(\frac{-1}{27}\right) + 15\cdot\frac{1}{9} - 3 + 5 > 0$

** $P(-3) = \underbrace{3(-3)^3 + 5\cdot 3(-3)^2}_{2\cdot 27} + 9(-3) + 5 > 0$

lo zero sta in $(-\infty, -3)$

$P(-5) = \cancel{3(-5)^3} + \cancel{3\cdot 5^3} + 9(-5) + 5 < 0$

$\Rightarrow$ l'eventuale zero cade tra -5 e -3 per il teor. degli zeri

Proseguire: $P(-4) = \underbrace{3(-4)^3 + 5\cdot 3\cdot 4^2}_{3\cdot 16} - 9\cdot 4 + 5$
$-36+5 = 17 > 0$

Quindi lo zero cade in $(-5,-4)$ ecc.
Chiamo tale zero α: il grafico di $P(x)$ dice che $P(x) > 0$ per $x > \alpha$ e $P(x) < 0$ per $x < \alpha$. Quindi

In $x = \alpha$ c'è un punto di flesso; $f(x)$ è concava in $(-\infty, \alpha)$ e in $(-1, 1)$ ed è convessa in $(\alpha, -1)$ e in $(1, +\infty)$.