$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$$

$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ in $[1,2]$ è continua

infatti $f(x)$ è def. in $(-1,0)\cup(0,+\infty)$ quindi è def. in $[1,2]$ e è rapporto di 1 che in quanto cost. è continua e $x\sqrt{x+1}$ che è prodotto di 2 funz. certamente cont. in $[1,2]$

Quindi l'integrale di C.-R. esiste

1°) determino una primitiva:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx =$$

sostituisco $\sqrt{x+1} = t$

$x+1 = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{2\cancel{t}\,dt}{(t^2-1)\cdot\cancel{t}} = \int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + c = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$$

2°) $$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \left[\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|\right]_1^2 =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}\right).$$

Fac-simile 3 - Es. 5

$$\int_4^{10} \frac{1}{x^2-8x+52}\,dx$$

cerco una primitiva $G(x)$ di $\frac{1}{x^2-8x+52}$

e poi calcolo $G(10)-G(4)$.

Determinazione di una primitiva:

la funz. integranda è razionale fratta con

gr (Num) < gr (Den) = 2

$\downarrow$

il pol. al denom. è scomponibile $(x-a)(x-b)$

o è irriducibile?

$$\frac{\Delta}{4} = 4^2 - 52 < 0 \implies \text{pol è irriducibile}$$

$$x^2-8x+52 = (x-4)^2+36 = 36\left[\left(\frac{x-4}{6}\right)^2+1\right]$$

Sostituisco $\frac{x-4}{6} = t \implies dx = 6\,dt$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+52} = \int \frac{\cancel{6}\,dt}{\cancel{36}_{6}\,(1+t^2)} = \frac{1}{6}\arctan t + c =$$

$$= \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x-4}{6}\right) + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

Scelgo $G(x) = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x-4}{6}\right) \implies$

$$\int_4^{10} \frac{dx}{x^2-8x+52} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{24}.$$

4. Trovare le primitive di $(x+1)\ln|2x|$ specificandone il dominio

<u>Svolgimento</u>:

$f(x) = (x+1)\ln|2x|$ è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è continua in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$. Quindi il dominio di una primitiva può essere $(-\infty,0)$ oppure $(0,+\infty)$: dipenderà da quali sono gli x in cui voglio che prenda valori. Ad es. se voglio la primitiva che in -1 vale 0 il dominio $(-\infty,0)$ (cioè l'intervallo che contiene -1)

$$\int (x+1)\ln|2x|\,dx \underset{\boxed{\text{pp. fatt. finito } \ln|2x|}}{=} \frac{(x+1)^2}{2}\ln|2x| - \frac{1}{2}\int (x+1)^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\ln|2x| - \frac{1}{2}\int \left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\ln|2x| - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x|\right) + c$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\ln|2x| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{x^2}{4} - x + c$$