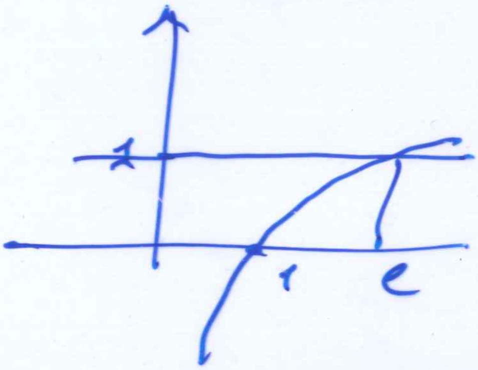
In $[2,+\infty)$: $\ln x > 0$

$$\frac{1}{x^2 \ln x} \leq \frac{1}{x^2} \iff \frac{1-\ln x}{x^2 \ln x} \leq 0$$ (poiché

$x^2 \ln x > 0$) $\iff 1 - \ln x \leq 0 \iff \ln x \geq 1$

$\iff x \geq e$



$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx = \underbrace{\int_2^{e} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx}_{\text{c. R. numero}} + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$$

Visto che in $[e, +\infty)$ si ha

$$\frac{1}{x^2 \ln x} \leq \frac{1}{x^2}$$

e $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (a $\lim_{z \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_e^{z} = \frac{1}{e}$)

posso dire che $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ converge a un certo α

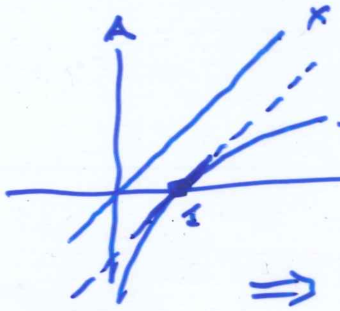
Quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx = \int_2^{e} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx + \alpha \text{ : converge.}$$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ è divergente perché:

confronto $\frac{1}{\ln x}$ con $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$

$\frac{x-\ln x}{x\ln x} > 0 \iff x > \ln x$



$\ln x$ concava in $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ giace sempre sotto la tang. a un qualunque punto del suo grafico, ad es. $(1,0)$

$\Rightarrow$ i due grafici non hanno intersezione

$\Rightarrow x > \ln x \quad \forall x \in (0,+\infty)$

Quindi $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \quad \forall x \in [e,+\infty)$

Poiché $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ posso dire che anche

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx = +\infty$ per il teor. del confronto.