Appunti di Algebra Lineare per il Corso di Matematica del Continuo

Davide Fermi

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono scritti per la parte di Algebra Lineare relativa al corso di Istituzioni di Matematica del corso di laurea triennale in Informatica Musicale. Essi sono scritti con l'intenzione di fornire delle conoscenze basilari sull'argomento, quali alcune definizioni fondamentali ed alcuni semplici risultati, nonché alcuni esempi delle stesse.

La trattazione qui svolta non intende in alcun modo essere esaustiva. Per una analisi più completa di questi argomenti si rimanda a libri di testo quali [1], per lo studio dei vettori in $\mathbb{R}^n$, delle matrici e dei sistemi lineari, e [2], per una trattazione più astratta e formale degli argomenti di teoria. Infine si segnalano [3] e il sito didattico [4], ricco di esempi ed esercizi.

2 Spazi vettoriali

2.1 Generalità

In questa sezione si introducono il concetto di spazio vettoriale e le varie nozioni ad esso associate. Questi concetti verranno prima trattati in maniera assiomatica e rigorosa, dando le definizioni basilari e alcuni semplici risultati; in seguito, si procederà alla discussione di alcuni degli esempi più rilevanti in matematica.

Definizione 2.1.1. Uno *spazio vettoriale* (*reale*) è una terna $(V, +, \cdot)$, formata da un insieme V, i cui elementi sono detti *vettori*, e da due operazioni $+$, $\cdot$, soddisfacenti gli assiomi elencati qui di seguito.
Le operazioni sono:

i. *Somma (tra vettori):*
$$+ : V \times V \to V\,, \qquad (v, w) \;\mapsto\; v + w\,. \tag{2.1.1}$$

ii. *Prodotto (tra numeri reali e vettori):*
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V\,, \qquad (\alpha, v) \;\mapsto\; \alpha \cdot v \equiv \alpha\, v\,. \tag{2.1.2}$$
(in questo contesto, un numero reale è chiamato anche uno *scalare*; dunque $\alpha\, v$ è il prodotto tra lo scalare α e il vettore v).

Gli assiomi soddisfatti dalle due operazioni sono i seguenti:

a.1. Associatività della somma:
$$(u + v) + w = u + (v + w)\,, \qquad \forall\, u, v, w \in V\,. \tag{2.1.3}$$

a.2. Commutatività della somma:
$$v + w = w + v\,, \qquad \forall\, v, w \in V\,. \tag{2.1.4}$$

a.3. Elemento neutro per la somma:
$$\exists\, o \in V \quad \text{tale che} \quad v + o = v\,, \qquad \forall\, v \in V \tag{2.1.5}$$
(con il simbolo o si indicherà sempre l'elemento di cui sopra, anche detto il *vettore nullo* o lo *zero*).

a.4. Esistenza dell'opposto:
$$\forall\, v \in V \quad \exists\, -v \in V \quad \text{tale che} \quad v + (-v) = o \tag{2.1.6}$$
(l'elemento $-v$ sarà chiamato *opposto* di v).

a.5. Distributività del prodotto rispetto alla somma dei vettori:
$$\alpha\,(u + v) = \alpha\, u + \alpha\, v\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, v, w \in V\,. \tag{2.1.7}$$

a.6. Distributività del prodotto rispetto alla somma degli scalari:
$$(\alpha + \beta)\, v = \alpha\, v + \beta\, v\,, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in V\,. \tag{2.1.8}$$

a.7. Compatibilità del prodotto tra scalari e vettori con il prodotto di $\mathbb{R}$:

$$\alpha\,(\beta\,v) = (\alpha\,\beta)\,v\,, \qquad \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall\,v\in V\,. \tag{2.1.9}$$

a.8. Elemento neutro del prodotto per uno scalare: detta 1 l'usuale unità di $\mathbb{R}$, risulta

$$1\,v = v\,, \quad \forall\,v\in V\,. \tag{2.1.10}$$

Osservazione 2.1.1. Spesso nel seguito, con un piccolo abuso di linguaggio, si dirà che "V è uno spazio vettoriale", sottointendendo le operazioni di somma di vettori e prodotto per uno scalare ad esso associate, quando sarà chiara la loro definizione.

Gli assiomi a.1- a.8 della Def. 2.1.1 permettono di dimostrare le affermazioni sottoelencate.

Lemma 2.1.1. Vale quanto segue:

1) Siano $0\in\mathbb{R}$ lo zero scalare e $o\in V$ il vettore nullo. Allora

$$0\,v = o\,, \quad \forall\,v\in V \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \alpha\,o = o\,, \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\,. \tag{2.1.11}$$

2) Il vettore nullo $o\in V$ è unico.

3) Per ogni $v\in V$ l'opposto $-v\in V$ è unico e soddisfa

$$(-v) = (-1)\,v\,. \tag{2.1.12}$$

2.2 Alcuni esempi di spazi vettoriali

Gli spazi $\mathbb{R}^n$

Fissato $n\in\mathbb{N}$, si consideri l'insieme prodotto

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ volte}}\,, \tag{2.2.1}$$

i cui elementi sono le *n-uple di numeri reali*, cioè le famiglie $(x_i)_{i=1,\ldots n}$ dove $x_i\in\mathbb{R}$ per ogni i. Salvo esplicita indicazione contraria, nel seguito un elemento di $\mathbb{R}^n$ si scriverà si indicherà con un simbolo in grassetto come $\mathbf{x},\mathbf{y},...$, e si rappresenterà con una scrittura *in verticale.* In altri termini, gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si scriveranno

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\,, \qquad \text{con } x_i\in\mathbb{R},\ \forall\,i=1,\ldots,n\,, \tag{2.2.2}$$

oppure

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\,, \qquad \text{con } y_i\in\mathbb{R},\ \forall\,i=1,\ldots,n\,, \tag{2.2.3}$$

ecc.

Definizione 2.2.1. D'ora in avanti, un elenento di $\mathbb{R}^n$ sarà detto anche un *vettore in* $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ha la forma (2.2.2), per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ diremo che x_i è la *componente* i*-esima* del vettore $\mathbf{x}$.

Abbstanza ovviamente, due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ si dicono *uguali* (si scrive $\mathbf{x}=\mathbf{y}$) se le rispettive componenti sono uguali a una a una ([1])

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i = y_i\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.2.4}$$

Definizione 2.2.2. Sia $\mathbf{x}$ un vettore in $\mathbb{R}^n$ (si veda la (2.2.2)). Il *trasposto* di $\mathbf{x}$ è la n-upla orizzontale

$$\mathbf{x}^T = (x_1, \, \ldots \,, x_n)\,. \tag{2.2.5}$$

Osservazione 2.2.1. Spesso, i vettori e i loro trasposti definiti in questi appunti sono rispettivamente denominati "vettori colonna" e "vettori riga".

Esempio 2.2.1. La scrittura

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.6}$$

rappresenta un vettore in $\mathbb{R}^3$ la cui seconda componente è $x_2 = -2$. Il trasposto di $\mathbf{x}$ è

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.7}$$

Definizione 2.2.3. Si defiscono le seguenti operazioni sui vettori in $\mathbb{R}^n$.

i. *Somma tra vettori* ([2])

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}\,, \tag{2.2.8}$$

definita in modo tale che le componenti del vettore somma $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ sono date dalla somma delle rispettive componenti dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$z_i = x_i + y_i\,, \qquad \forall\, i=1, \ldots, n\,. \tag{2.2.9}$$

ii. *Prodotto tra scalari e vettori*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \qquad (\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha\, \mathbf{x}\,, \tag{2.2.10}$$

definita in modo tale che le componenti del vettore risultante $\mathbf{z} = \alpha\, \mathbf{x}$ sono date dal prodotto delle singole componenti del vettore $\mathbf{x}$ per lo scalare α

$$z_i = \alpha\, x_i\,, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.2.11}$$

[1] Chiaramente, non ha senso parlare di una relazione di uguaglianza per vettori appartenenti a spazi diversi; ad esempio

$$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\,,\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}\,.$$

[2] **N.B.**: La somma di vettori è definita solo per vettori nello stesso spazio $\mathbb{R}^n$. Non si possono sommare vettori appartenenti a spazi diversi (ad esempio non è definita l'operazione $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ per $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$).

Osservazione 2.2.2. Per i casi $n = 1, 2, 3$ è possibile dare una interpretazione geometrica più intuitiva della somma di vettori e della moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Ad esempio, la somma di due vettori può essere ottenuta per mezzo della regola del parallelogramma (o, equivalentemente, della regola punta-coda), mentre la moltiplicazione di un vettore per uno scalare corrisponde ad una dilatazione (o ad una contrazione) della lunghezza del vettore considerato. A tal proposito, si veda [2], pagg.13-15.

Definizione 2.2.4. Il *vettore nullo* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore con tutte le componenti nulle

$$\mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.2.12}$$

Osservazione 2.2.3. Il vettore nullo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ non è da confondere con lo zero scalare $0 \in \mathbb{R}$ ([3]).

Proposizione 2.2.1. Siano $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le operazioni definite, rispettivamente, nelle equazioni (2.2.8) (2.2.10); allora, la terna $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale. In particolare, si ha che:

- il *vettore nullo* è (si veda la definizione 2.2.4)

$$o \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \; ; \tag{2.2.13}$$

- l'*opposto* di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ è il vettore

$$-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} . \tag{2.2.14}$$

Osservazione 2.2.4. i) In particolare, è uno spazio vettoriale anche $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$; in questo caso la somma di vettori e il prodotto tra scalari e vettori coincidono con le ordinarie operazioni di somma e prodotto definite in $\mathbb{R}$.
ii) Quanto detto prima si applica anche nel caso $n = 0$. L'insieme $\mathbb{R}^0$ l'insieme che ha come unico elemento la famiglia vuota; indicando questa con $\mathbf{0}$, abbiamo questa descrizione per le operazioni nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

[3] I due coincidono solo nel caso in cui sia $n=1$.

Esempio 2.2.2. Si considerino i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ definiti come

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{2.2.15}$$

La somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) + 7 \\ 0 + 3 \\ 1 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{2.2.16}$$

Il prodotto tra $\mathbf{x}$ lo scalare 6 è

$$6\,\mathbf{x} = 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{2.2.17}$$

La combinazione lineare ([4]) $3\,\mathbf{x} + a\,\mathbf{y}$ è

$$3\,\mathbf{x} + a\,\mathbf{y} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7a \\ 3a \\ -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a-6 \\ 3a \\ 3-4a \end{pmatrix}. \tag{2.2.18}$$

L'opposto di $\mathbf{x}$ è

$$-\mathbf{x} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.19}$$

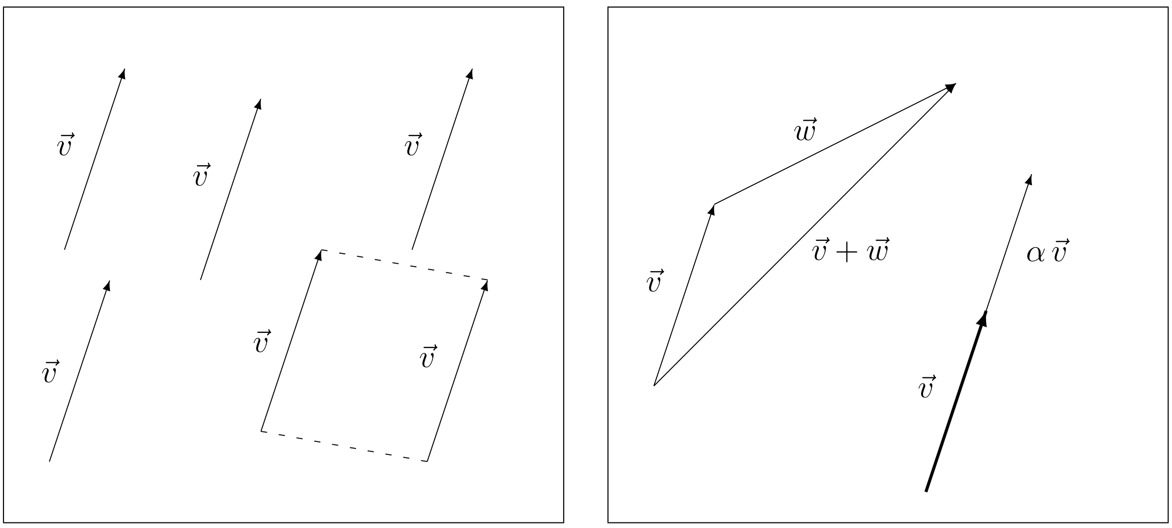
[4] Si veda la Definizione 2.3.2 nel seguito per la definizione formale di combinazione lineare.

Altri esempi di spazi vettoriali

Esempio 2.2.3. Nell'ambito della geometria euclidea (nel piano o nello spazio), si considerino i *segmenti orientati*; si chiamano così i segmenti muniti di un verso di percorrenza (cosicchè, per ciascuno di questi segmenti, si può parlare di un "estremo iniziale" e di un "estremo finale").
Sull'insieme dei segmenti orientati si può definire una *relazione di equivalenza*, nel modo seguente: due segmenti orientati si dicono equivalenti se hanno uguale direzione (cioè, se sono paralleli), uguale lunghezza e uguale verso. Una riformulazione della stessa definizione è: due segmenti orientati sono equivalenti se sono lati opposti di un parallelogrammo.
Chiamiamo *vettore geometrico* o, più brevemente, *vettore*, una classe di equivalenza di segmenti orientati. Tradizionalmente, un vettore geometrico si indica con un simbolo come $\vec{v}, \vec{w}, ...$, con una freccia al di sopra di una lettera. Un vettore geometrico $\vec{v}$ viene individuato specificando un qualunque segmento orientato che appratiene alla classe di equivalenza $\vec{v}$; nella figura in basso a sinstra abbiamo indicato molti segmenti orientati che individuano uno stesso vettore $\vec{v}$.
Sia

$$\mathcal{V} := \text{insieme di tutti i vettori geometrici}\,. \tag{2.2.20}$$

$\mathcal{V}$ può essere munito dell'operazione di somma $+ : (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$ definita dalla "regola del triangolo" e dell'operazione di prodotto per uno scalare $\cdot : (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v} \equiv \alpha\, \vec{v}$ definita come la dilatazione di $\vec{v}$ per un fattore α ([5]): si veda la figura in basso a destra.
Si può dimostrare che la terna $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale. In particolare, il vettore nullo è dato dalla classe di equivalenza di tutti i segmenti orientati di lunghezza nulla.



[5]Se $\alpha \geqslant 0$, il vettore $\alpha\vec{v}$ ha per definizione la direzione e il verso di $\vec{v}$, e la lunghezza di $\alpha\vec{v}$ è quella di $\vec{v}$ moltiplicata per α (più precisamente: $\alpha\vec{v}$ è la classe di equivalenza dei segmenti orientati che hanno la direzione e il verso di un qualunque segmento nella classe $\vec{v}$, oltre ad avere lunghezza pari ad α volte la lunghezza di un rappresentante di $\vec{v}$). Se $\alpha < 0$, per definizione $\alpha\vec{v}$ ha la direzione di $\vec{v}$, il verso opposto e la lunghezza di $\alpha\vec{v}$ è $|\alpha|$ volte la lunghezza di $\vec{v}$ (anche questa prescrizione si può formulare in modo più preciso, facendo riferimento ai segmenti orientati delle classi $\vec{v}$ e $\alpha\vec{v}$). La figura in basso a destra rappresenta $\alpha\vec{v}$ in un caso con $\alpha > 1$

Esempio 2.2.4. Si consideri l'insieme dei polinomi (di grado qualsiasi) con coefficienti reali

$$\mathcal{P}[\mathbb{R}] := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_m x^m \mid \alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\,,\ m \in \mathbb{N}\}\,. \tag{2.2.21}$$

Qui di seguito introdurremo le operazioni $+$ e $\cdot$ di somma tra polinomi e di prodotto tra scalari e polinomi, che saranno definite in termini dei coefficienti dei polinomi coinvolti. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare e p, q una coppia di polinomi, rispettivamente di grado $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ ([6]):

$$p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m\,, \qquad q(x) := \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n\,; \tag{2.2.22}$$

il polinomio somma $p + q \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ (di grado n) e il polinomio prodotto $\alpha \cdot p \equiv \alpha\, p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ (di grado m), sono rispettivamente definiti come

$$(p+q)(x) := (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \ldots + (\alpha_m + \beta_m)x^m + \beta_{m+1}x^{m+1} + \ldots \beta_n x^n\,, \tag{2.2.23}$$

$$(\alpha p)(x) := (\alpha\alpha_0) + (\alpha\alpha_1)x + \ldots + (\alpha\alpha_m)x^m\,. \tag{2.2.24}$$

Si noti che a destra delle uguaglianze (2.2.23) (2.2.24) i simboli $\alpha_0 + \beta_0$, $\alpha\alpha_0$, ecc. indicano somma e prodotti usuali in $\mathbb{R}$.
Si verifica facilmente che la terna $(\mathcal{P}[\mathbb{R}], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale. In particolare, il vettore nullo è il polinomio

$$o(x) = 0 + 0\,x + 0\,x^2 + \ldots 0\,x^m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \tag{2.2.25}$$

Esempio 2.2.5. Sia X un insieme e $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale (ad esempio $\mathbb{R}^n$). L'insieme $\mathfrak{F}(X, V)$ delle funzioni da X a V è uno spazio vettoriale se munito delle operazioni seguenti.

i. Somma puntuale

$$+ : \mathfrak{F}(X, V) \times \mathfrak{F}(X, V) \to \mathfrak{F}(X, V)\,, \qquad (f, g) \mapsto f + g\,, \tag{2.2.26}$$

definita in modo tale che

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \forall\, x \in X\,. \tag{2.2.27}$$

(dove, a destra dell'uguale, figura una somma di vettori in V).

ii. Prodotto per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{F}(X, V) \to \mathfrak{F}(X, V)\,, \qquad (\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot f \equiv \alpha\, f\,, \tag{2.2.28}$$

definita in modo tale che

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad \forall\, x \in X\,. \tag{2.2.29}$$

(a destra dell'uguale figura il prodotto per uno scalare nello spazio vettoriale V).

In particolare, l'elemento neutro per la somma puntuale (cioè per la somma di vettori) è la funzione identicamente nulla O che ad ogni $x \in X$ associa il vettore nullo $o \in V$

$$O : X \to V\,, \qquad x \mapsto O(x) = o\,. \tag{2.2.30}$$

[6] La scelta $m < n$ è del tutto arbitraria e serve solo a fissare le idee.

2.3 Sottospazi vettoriali, combinazioni lineari e basi

Nel seguito si considera uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$, che per brevità sarà indicato solo con V.

Definizione 2.3.1. Sia $W \subset V$ un sottoinsieme (non vuoto) di V. Si dice che W è un *sottospazio vettoriale* di V se soddisfa le proprietà seguenti.

i. W è chiuso rispetto alla operazione di somma in V

$$v + w \in W\,, \qquad \forall\, v, w \in W\ ; \tag{2.3.1}$$

ii. W è chiuso rispetto alla operazione di moltiplicazione per uno scalare in V

$$\alpha\, v \in W\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, v \in W\ ; \tag{2.3.2}$$

Osservazione 2.3.1. Dalla ii. segue che il vettore nullo $o \in V$ appartiene a W; infatti, preso un qualunque $v \in W$, la ii. con $\alpha = 0$ ci dice è $o = 0 \cdot v \in W$.

Osservazione 2.3.2. Il concetto di sottospazio vettoriale è l'analogo nella teoria degli spazi vettoriali della nozione di sottoinsieme nella teoria degli insiemi. Un sottospazio vettoriale è a sua volta uno spazio vettoriale.

Esempio 2.3.1. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ analizzato in precedenza. Il sottoinsieme $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ dei vettori con la prima componente nulla

$$W_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \tag{2.3.3}$$

è un sottospazio vettoriale. Infatti si verifica facilmente che i suoi elementi soddisfano le proprietà i,ii,iii della Definizione 2.3.1.

Esempio 2.3.2. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ fissato, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a m

$$\mathcal{P}_{\leqslant m}[\mathbb{R}] := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n \ \mid\ \alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ n \leqslant m\}\,, \tag{2.3.4}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio $(\mathcal{P}[\mathbb{R}],+,\cdot)$ descritto nell'esempio 2.2.4.

Si consideri ora una famiglia di m vettori in V

$$\{v_1, \ldots, v_m\}\,, \qquad m \in \mathbb{N}\ . \tag{2.3.5}$$

Definizione 2.3.2. Sia $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ una famiglia di scalari. Il vettore dato dall'espressione

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, v_i = \alpha_1\, v_1 + \ldots + \alpha_m\, v_m \ \in\ V \tag{2.3.6}$$

è detto *combinazione lineare* dei vettori $v_1, \ldots, v_m$ con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Definizione 2.3.3. Si dice *sottospazio generato* dalla famiglia $\{v_1, \ldots, v_m\}$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari

$$\langle v_1, \ldots, v_m\rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \right\}. \tag{2.3.7}$$

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono detti *generatori* del sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle$.

Lemma 2.3.1. Il sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 2.3.4. I vettori $v_1, \ldots, v_m$ si dicono *linearmente dipendenti* (*su* $\mathbb{R}$) se il vettore nullo può essere ottenuto come loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, cioè se

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\,,\ \text{non tutti nulli, tali che} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, v_i = o\,. \tag{2.3.8}$$

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ si dicono *linearmente indipendenti* (*su* $\mathbb{R}$) se non sono linearmente dipendenti, cioè se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, v_i = o \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i = 0\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m\,. \tag{2.3.9}$$

Lemma 2.3.2. Valgono i seguenti risultati.

1) Se i vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}$ sono linearmente dipendenti, allora risultano tali anche i vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m$ da essi ottenuti aggiungendo il vettore v_m.

2) Se i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti, allora risultano tali anche i vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}$ da essi ottenuti rimuovendo il vettore v_m.

Esempio 2.3.3. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ed in esso i vettori

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} := \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{2.3.10}$$

Allora i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti, mentre i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti. Infatti, da una parte si ha

$$2\,\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{y} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,. \tag{2.3.11}$$

Dall'altra parte, si consideri una generica combinazione lineare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ con coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si imponga che questa sia uguale al vettore nullo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{0} = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ 1\alpha + \frac{3}{2}\,\beta \\ 3\alpha + 5\beta \end{pmatrix}; \tag{2.3.12}$$

allora

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 1\alpha + \frac{3}{2}\,\beta = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}. \tag{2.3.13}$$

Questo sistema può essere risolto per sostituzione ([7]), ottenendo come unica soluzione

[7] Si veda la sezione 4 per altri metodi risolutivi.

$$\alpha = 0\,, \qquad \beta = 0\,; \tag{2.3.14}$$

dunque l'unica combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ che permette di ottenere il vettore nullo è quella con entrambi i coefficienti nulli. Ciò equivale a dire che i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti. Per il punto 1) nel Lemma 2.3.2, si può inoltre concludere che anche i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti.

Esempio 2.3.4. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ fissato, si consideri la famiglia di polinomi $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ definita come

$$p_i(x) = x^i \qquad \text{per } i = 0, 1, \ldots, m\ . \tag{2.3.15}$$

E' evidente che i polinomi $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ così definiti sono linearmente indipendenti; inoltre si verifica facilmente che questi generano il sottospazio $\mathcal{P}_{\leqslant m}[\mathbb{R}]$ discusso nell'esempio 2.3.2, cioè che

$$\mathcal{P}_{\leqslant m}[\mathbb{R}] = \langle p_0, \ldots, p_m \rangle\ . \tag{2.3.16}$$

Definizione 2.3.5. I vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$ sono detti una *base di V* se

i. sono linearmente indipendenti;

ii. il sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ da essi generato coincide con lo spazio vettoriale V, cioè ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_m$.

Si fa vedere che, sotto le due condizioni precedenti, la rappresentazione di qualunque vettore $v \in V$ come combinazione lineare

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \tag{2.3.17}$$

(con $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$) è *unica.* Viceversa, se, per certi vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$, accade che ogni $v \in V$ ha una ed una sola rappresentazione (2.3.17), allora $v_1, \ldots, v_m$ è una base di V.

Definizione 2.3.6. Per ogni $v \in V$, i numeri reali $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ univocamente definiti dalla (2.3.17) si chiamano le *componenti* di v rispetto alla base $v_1, \ldots, v_m$.

Esempio 2.3.5. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. La famiglia di vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3.18}$$

è una base. Per ogni $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n\ . \tag{2.3.19}$$

Per l'importanza della base (2.3.18), ad essa viene attribuito il nome di *base canonica.*

Esempio 2.3.6. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. La famiglia di vettori

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \tag{2.3.20}$$

è una base (diversa da quella canonica introdotta nell'esempio precedente). Per verificare questa affermazione si può verificare in modo diretto che $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ soddisfano le condizioni nella definizione di base; un altro metodo, più rapido, per arrivare alla stessa conclusione sarà presentato a pag. 28 (si vedano, in particolare, l'eq. (3.7.18) e le considerazioni che la accompagnano).

Definizione 2.3.7. Sia $m \in \mathbb{N}$. Si dice che uno spazio vettoriale V ha *dimensione* m se V ha una base formata da m vettori.

Osservazione 2.3.3. Gli Esempi 2.3.5, 2.3.6 mostrano chiaramente che in generale uno spazio vettoriale ammette più basi distinte. Si può dimostrare che, se V ha una base formata da m vettori, tutte le altre basi di V hanno m elementi.

3 Applicazioni Lineari

3.1 Generalità

In questa sezione si introducono il concetto di applicazione lineare tra spazi vettoriali e le varie nozioni ad esso associate. Anche in questo caso, ad una prima formulazione assiomatica e rigorosa seguirà la discussione di alcuni degli esempi più rilevanti in matematica.

Si considerino due spazi vettoriali (reali) generici ([8])

$$(V, +, \cdot) \qquad \text{e} \qquad (V', +', \cdot') \, . \tag{3.1.1}$$

Definizione 3.1.1. Una mappa tra gli insiemi V e V'

$$L : V \to V' \, , \qquad v \mapsto L(v) \equiv L\, v \, . \tag{3.1.2}$$

è detta *applicazione lineare* se soddisfa i seguenti assiomi ([9]).

a.1. Compatibilità con l'operazione di somma di vettori

$$L(u + v) = Lu +' Lv \quad \text{in } V' \, , \qquad \forall\, u, v \in V \, . \tag{3.1.3}$$

a.2. Compatibilità con l'operazione di moltiplicazione per uno scalare

$$L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot' Lv \quad \text{in } V' \, , \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \, , \; \forall\, v \in V \, . \tag{3.1.4}$$

Si indicherà con il simbolo $\mathfrak{L}(V, V')$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in V'

$$\mathfrak{L}(V, V') = \{L : V \to V' \mid L \text{ è una applicazione lineare}\} \, . \tag{3.1.5}$$

Osservazione 3.1.1. Si noti che a sinistra delle uguaglianze (3.1.3) e (3.1.4) compaiono rispettivamente le operazioni di somma $+$ e prodotto per uno scalare $\cdot$ nello spazio vettoriale V, mentre a destra delle stesse uguaglianze compaiono rispettivamente le operazioni di somma $+'$ e prodotto per uno scalare $\cdot'$ nello spazio vettoriale V'.

Questa distinzione verrà sottointesa nel seguito e, per semplicità di notazione, si utilizzeranno i simboli $+, \cdot$ per indicare le operazioni di somma di vettori e di prodotto per uno scalare in qualsiasi spazio vettoriale. Lo spazio in cui si sta lavorando sarà indicato dagli elementi che compariranno nelle espressioni.

Gli assiomi a.1 - a.2 della Definizione 3.1.1 permettono di dimostrare i seguenti risultati.

Lemma 3.1.1. Sia $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ una applicazione lineare.

1) L mappa combinazioni lineari in combinazioni lineari, nel senso che

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, L\, v_i \, , \qquad \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \, , \quad \forall\, v_1, \ldots, v_m \in V \, . \tag{3.1.6}$$

[8] In generale gli spazi V e V' sono diversi anche a livello insiemistico, perciò le operazioni di somma e prodotto per uno scalare su essi definite sono a loro volta diverse.

[9] Gli assiomi seguenti vengono spesso riassunti dicendo che la mappa L "rispetta" (oppure "preserva") la struttura di spazio vettoriale, vale a dire le operazioni di somma di vettori e di prodotto per uno scalare.

2) L mappa il vettore nullo $o \in V$ nel vettore nullo $o' \in V'$, nel senso che

$$L\,o = o' \ . \tag{3.1.7}$$

Esempio 3.1.1. Sia V uno spazio vettoriale. Due particolari tipi di applicazioni lineari da V a V sono l'*applicazione identica*

$$id : V \to V \ , \qquad v \mapsto id\,v := v \quad \forall\, v \in V \ , \tag{3.1.8}$$

e l'*applicazione nulla* (o è il vettore nullo nello spazio vettoriale V)

$$O : V \to V \ , \qquad v \mapsto O\,v := o \quad \forall\, v \in V \ . \tag{3.1.9}$$

3.2 Matrici

Nel seguito si indicheranno con $m, n, p, \ldots$ dei numeri naturali non nulli

$$m, n, p, \ldots \in \mathbb{N} \ . \tag{3.2.1}$$

Definizione 3.2.1. Una *matrice di ordine* (m, n) ([10]) (*reale*) è una tabella di $m{\cdot}n$ numeri reali $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$) disposti su m righe ed n colonne nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \tag{3.2.2}$$

Nel seguito si indicheranno sempre le matrici con delle lettere maiuscole (ad esempio $A, B, C, \ldots$). Per ogni $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, il numero a_{ij} è detto *elemento* ij della matrice, intendendo ovviamente che è l'elemento appartenente all i-esima riga e alla j-esima colonna.

Esempio 3.2.1. La seguente scrittura rappresenta una matrice di ordine $(2, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} . \tag{3.2.3}$$

Essa ha 2 righe

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} , \tag{3.2.4}$$

e 3 colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} . \tag{3.2.5}$$

L'elemento $1\,3$ della matrice A è

$$a_{13} = -5 \ . \tag{3.2.6}$$

Definizione 3.2.2. Si indicherà con $\mathfrak{M}(m, n)$ l'insieme di tutte matrici di ordine (m, n) '

$$\mathfrak{M}(m, n) := \{A \mid A \text{ è una matrice di ordine } (m, n)\} \ . \tag{3.2.7}$$

Nel seguito per dire che A è una matrice di ordine (m, n) si scriverà semplicemente $A \in \mathfrak{M}(m, n)$.

[10] Si dice anche *matrice di tipo* (m, n), oppure *matrice* m *per* n.

Osservazione 3.2.1. I vettori in $\mathbb{R}^n$ sono matrici di ordine $(n,1)$, cioè sono elementi di $\mathfrak{M}(n,1)$. Analogamente, i loro trasposti sono matrici di ordine $(1,n)$, cioè sono elementi di $\mathfrak{M}(1,n)$.

Definizione 3.2.3. La *matrice nulla* $\mathbb{0}_{mn} \in \mathfrak{M}(m,n)$ è la matrice di ordine (m,n) con tutti gli elementi nulli.

Ad esempio

$$\mathbb{0}_{23} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.8}$$

Matrici quadrate

Definizione 3.2.4. Una matrice A si dice *quadrata di ordine* n se ha lo stesso numero n di righe e di colonne. Si indicherà con $\mathfrak{M}(n)$ l'insieme di tutte matrici quadrate di ordine n.

La *diagonale principale* di una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ è l'insieme degli elementi $\{a_{ii}\}_{i=1,\dots,n}$.

Definizione 3.2.5. Particolari tipi di matrici quadrate sono i seguenti.

1) Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ si dice *triangolare superiore* (*inferiore*) se ha tutti gli elementi sotto (sopra) la diagonale principale nulli, cioè se
$$a_{ij} = 0\,, \qquad \forall\, i > j\ (i < j),\ i,j = 1,\dots,n\,. \tag{3.2.9}$$

2) Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ si dice *diagonale* se gli unici elementi non nulli sono quelli appartenenti alla diagonale principale, cioè se
$$a_{ij} = 0\,, \qquad \forall\, i \neq j\,,\ i,j = 1,\dots,n\,. \tag{3.2.10}$$

3) La *matrice nulla* $\mathbb{0}_n \in \mathfrak{M}(n)$ è la matrice quadrata con tutti gli elementi nulli
$$\mathbb{0}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{3.2.11}$$

4) La *matrice identità* $\mathbb{1}_n \in \mathfrak{M}(n)$ è la matrice diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1
$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{3.2.12}$$

Esempio 3.2.2. Un esempio di matrice triangolare superiore è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \tag{3.2.13}$$

mentre uno di matrice diagonale è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.14}$$

Entrambe sono ovviamente matrici quadrate, rispettivamente in $\mathfrak{M}(3)$ ed $\mathfrak{M}(2)$.

Moltiplicazione di vettori per matrici

Definizione 3.2.6. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(m,n)$ una matrice di ordine (m,n) e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Si definisce il *prodotto a sinistra* di $\mathbf{x}$ per A come il vettore $A\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ le cui componenti sono

$$(A\,\mathbf{x})_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad \text{per } i = 1, \dots, m\,. \tag{3.2.15}$$

Esempio 3.2.3. Siano $A \in \mathfrak{M}(,)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^a$ la matrice e il vettore rispettivamente definiti come

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{3.2.16}$$

Il vettore risultante dal prodotto di $\mathbf{x}$ per A a sinistra è il vettore $A\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ dato da

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + (-5) \cdot (-3) \\ (-7) \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \end{pmatrix}. \tag{3.2.17}$$

Vale il seguente risultato fondamentale.

Proposizione 3.2.1. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$. Allora tutte e sole le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le applicazioni rappresentabili come prodotti a sinistra per matrici in $\mathfrak{M}(m,n)$. Più precisamente, si ha che

i. per ogni matrice $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ l'applicazione lineare $L_A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \qquad L_A\mathbf{x} := A \cdot \mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{3.2.18}$$

è lineare;

ii. per ogni applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esiste un'unica matrice $A_L \in \mathfrak{M}(m,n)$ tale che

$$L\,\mathbf{x} = A_L \cdot \mathbf{x} \quad \text{in } \mathbb{R}^m\,, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{3.2.19}$$

Si può allora concludere che esiste una biezione

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathfrak{M}(m,n)\,, \qquad L \mapsto A_L\,. \tag{3.2.20}$$

Esempio 3.2.4. Si considerino i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Allora la mappa

$$P_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto P_3\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.2.21}$$

è una applicazione lineare detta *proiezione*; essa può essere rappresentata come la mappa di moltiplicazione a sinistra per la matrice $\mathbb{P}_3 \in \mathfrak{M}(2,3)$ definita come

$$\mathbb{P}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.22}$$

Infatti l'azione della mappa P_3 su un qualsiasi vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ può essere scritta come

$$P_3\,\mathbf{x} = \mathbb{P}_3 \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.23}$$

dove $\mathbb{P}_3 \cdot \mathbf{x}$ è il prodotto tra la matrice $\mathbb{P}_3 \in \mathfrak{M}(2,3)$ ed il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ($\equiv \mathfrak{M}(3,0)$).

3.3 Operazioni tra applicazioni lineari

Definizione 3.3.1. Due applicazioni lineari $L, M \in \mathfrak{L}(V, V')$ si dicono *uguali* (si scrive $L = M$) se la agiscono allo stesso modo su tutti gli elementi dello spazio vettoriale di partenza, cioè se

$$L\,v = M\,v \quad \text{in } V', \qquad \forall\, v \in V\ . \tag{3.3.1}$$

Definizione 3.3.2. Si definiscono le seguenti operazioni tra applicazioni lineari. ([11])

i. *Somma di applicazioni lineari* ([12])

$$+ : \mathfrak{L}(V, V') \times \mathfrak{L}(V, V') \to \mathfrak{L}(V, V')\,, \qquad (L, M) \,\mapsto\, L + M\ , \tag{3.3.2}$$

definita in modo tale che l'azione dell'applicazione lineare somma $L + M$ è data da

$$(L + M)\,v := L\,v + M\,v \qquad \forall\, v \in V \tag{3.3.3}$$

(a destra dell'uguale, $+$ indica la somma in V').

ii. *Moltiplicazione per uno scalare*

$$\cdot : R \times \mathfrak{L}(V, V') \to \mathfrak{L}(V, V')\,, \qquad (\alpha, L) \,\mapsto\, \alpha \cdot L \equiv \alpha\, L\ , \tag{3.3.4}$$

definita in modo tale che l'azione dell'applicazione lineare risultante αL è data da

$$(\alpha L)\,v := \alpha(L\,v) \qquad \forall\, v \in V \tag{3.3.5}$$

(a destra dell'uguale, si considera in V' il prodotto tra lo scalare α e il vettore Lv).

Lemma 3.3.1. La terna $(\mathfrak{L}(V, V'), +, \cdot)$, dove le operazioni di somma di applicazioni lineari e di prodotto per uno scalare sono rispettivamente quelle definite nelle equazioni (3.3.2) (3.3.4), è uno spazio vettoriale.

Si dimostra facilmente che la mappa ottenuta come composizione di applicazioni lineari è a sua volta una applicazione lineare. Perciò, dati tre spazi vettoriali U, V, W, abbiamo una mappa

$$\circ : \mathfrak{L}(U, V) \times \mathfrak{L}(V, W) \to \mathfrak{L}(U, W)\,, \qquad (L, M) \,\mapsto\, M \circ L \tag{3.3.6}$$

dove $M \circ L$ è l'usuale composizione delle applicazioni M e L:

$$(M \circ L)\,v := M(L\,v) \quad \text{in } W\,, \qquad \forall\, v \in V\ . \tag{3.3.7}$$

[11] Si dice che le operazioni di somma e prodotto per uno scalare di applicazioni lineari sono *indotte* dalle analoghe operazioni nello spazio vettoriale di arrivo V'.

[12] **N.B.**: Come si era osservato per la somma tra vettori e la somma di matrici, anche la somma di applicazioni lineari è definita solo per applicazioni nello stesso spazio $\mathfrak{L}(V, V')$.

Operazioni tra matrici

Definizione 3.3.3. Due matrici $A, B \in \mathfrak{M}(m,n)$ si dicono *uguali* (si scrive $A = B$) se ([13]) i loro elementi sono uguali posizione per posizione

$$a_{ij} = b_{ij}\,, \qquad \forall\, i=1,\dots,m\,,\ j=1,\dots,n\,. \tag{3.3.8}$$

Definizione 3.3.4. Si definiscono le seguenti operazioni tra matrici.

i. *Somma di matrici* ([14])

$$+ : \mathfrak{M}(m,n) \times \mathfrak{M}(m,n) \to \mathfrak{M}(m,n)\,, \qquad (A,B) \mapsto A + B\,, \tag{3.3.9}$$

definita in modo tale che gli elementi della matrice somma $C = A + B$ sono date dalla somma dei rispettivi elementi delle matrici A, B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,, \qquad \forall\, i=1,\dots,m\,,\ j=1,\dots,n\,. \tag{3.3.10}$$

ii. *Prodotto per uno scalare*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{M}(m,n) \to \mathfrak{M}(m,n)\,, \qquad (\alpha, A) \mapsto \alpha\, A\,, \tag{3.3.11}$$

definita in modo tale che gli elementi della matrice risultante $C = \alpha\, A$ sono date dal prodotto dei singoli elementi della matrice A per lo scalare α:

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,, \qquad \forall\, i=1,\dots,m\,,\ j=1,\dots,n\,. \tag{3.3.12}$$

Lemma 3.3.2. La terna $(\mathfrak{M}(m,n), +, \cdot)$, in cui le operazioni di somma di matrici e prodotto per uno scalare sono rispettivamente quelle definite nelle equazioni (3.3.9) (3.3.11), è uno spazio vettoriale. Lo zero di $\mathfrak{M}(m,n)$ è la matrice $\mathbb{0}_{mn}$ della Definizione 3.2.3, pag. 16; l'opposta di una matrice A con elementi a_{ij} è la matrice $-A$ di elementi $-a_{ij}$.

Osservazione 3.3.1. Si consideri la corrispondenza biunivoca introdotta nella proposizione 3.2.1

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathfrak{M}(m,n)\,, \qquad L \mapsto A_L\,.$$

Si può dimostrare che due applicazioni lineari $L, L' \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono uguali nel senso della definizione 3.3.1 se e solo se le matrici $A_L, A_{L'} \in \mathfrak{M}(m,n)$ ad esse associate sono uguali nel senso della definizione 3.3.3. Similmente, si dimostra che la biezione preserva le operazioni di somma e prodotto, nel senso che

$$A_{L+L'} = A_L + A_{L'}\,, \quad A_{\alpha L} = \alpha A_L \qquad \text{per ogni } L, L' \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),\ \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{3.3.13}$$

---

[13] Come per i vettori in $\mathbb{R}^n$, non ha senso definire una relazione di uguaglianza tra matrici appartenenti a spazi diversi; ad esempio

$$A \in \mathfrak{M}(2,3)\,,\ B \in \mathfrak{M}(5,2) \quad \Rightarrow \quad A \neq B\,.$$

[14] **N.B.**: Come si era osservato per la somma tra vettori, anche la somma di matrici è definita solo per matrici nello stesso spazio $\mathfrak{M}(m,n)$. Non si possono sommare matrici di ordine diverso (ad esempio non è definita l'operazione $A+B$ per $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ e $B \in \mathfrak{M}(7,4)$).

Esempio 3.3.1. Si considerino le matrici $A, B \in \mathfrak{M}(2,3)$ definite come

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} . \tag{3.3.14}$$

La somma $A + B$ è

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7+(-7) & 2+(-1) & -5+3 \\ -1+0 & 2+0 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Il prodotto per uno scalare $-8\,A$ è

$$\begin{aligned} -8\,A &= (-8) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 \cdot 7 & -8 \cdot 2 & -8 \cdot (-5) \\ -8 \cdot (-1) & -8 \cdot 2 & -8 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 & -16 & 40 \\ 8 & -16 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

La matrice opposta di A è

$$-A = (-1) \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.3.17}$$

In alcuni casi si può anche definire una operazione di prodotto tra matrici come segue.

Definizione 3.3.5. Si definisce il *prodotto di matrici* ([15])

$$\cdot : \mathfrak{M}(m,n) \times \mathfrak{M}(n,p) \to \mathfrak{M}(m,p) , \qquad (A,B) \mapsto A \cdot B \equiv A\,B , \tag{3.3.18}$$

in modo tale che gli elementi della matrice prodotto $C = A \cdot B$ siano dati dalla relazione

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} , \qquad \forall\, i = 1, \ldots, m , \; j = 1, \ldots, p . \tag{3.3.19}$$

Osservazione 3.3.2. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ e le corrispondenze biunivoche (si veda la proposizione 3.2.1)

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathfrak{M}(n,m) , \qquad \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathfrak{M}(p,n) , \qquad \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \to \mathfrak{M}(p,m) . \tag{3.3.20}$$

Siano $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $M \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ due applicazioni lineari alle quali, tramite le prime due biezioni nell'equazione (3.3.20), sono rispettivamente associate le matrici $A_L \in \mathfrak{M}(n,m)$ e $A_M \in \mathfrak{M}(p,n)$. Si può considerare la composizione di queste applicazioni $M \circ L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ e dimostrare che la matrice associata a questa applicazione, tramite l'ultima biezione in (3.3.20), è data dal prodotto delle matrici A_L, A_M:

$$A_{M \circ L} = A_M \cdot A_L \;\in\; \mathfrak{M}(p,m) . \tag{3.3.21}$$

Quindi, identificando le applicazioni lineari tra spazi $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ con delle matrici, l'operazione di composizione di tali applicazioni deve essere identificata con l'operazione di prodotto tra le matrici ad esse associate.

[15] **N.B.**: Anche in questo caso, si presti attenzione al fatto che il prodotto è definito solo tra matrici tali che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda.

Esempio 3.3.2. Si considerino le matrici $A \in \mathfrak{M}(2,3)$, $B \in \mathfrak{M}(3,4)$ definite come segue

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & -6 & 5 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.3.22}$$

La matrice prodotto $A \cdot B \in \mathfrak{M}(2,4)$ è calcolata come segue

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & -6 & 5 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{\cdot}1{+}(-3){\cdot}(-8){+}5{\cdot}9 & 0{\cdot}(-2){+}(-3){\cdot}7{+}5{\cdot}1 & 0{\cdot}3{+}(-3){\cdot}(-6){+}5{\cdot}0 & 0{\cdot}(-4){+}(-3){\cdot}5{+}5{\cdot}1 \\ 4{\cdot}1{+}(-6){\cdot}(-8){+}0{\cdot}9 & 4{\cdot}(-2){+}(-6){\cdot}7{+}0{\cdot}1 & 4{\cdot}3{+}(-6){\cdot}(-6){+}0{\cdot}0 & 4{\cdot}(-4){+}(-6){\cdot}5{+}0{\cdot}1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 69 & -16 & 18 & -10 \\ 52 & -50 & 48 & -46 \end{pmatrix} . \tag{3.3.23}$$

Si noti che, viceversa, non si può definire il prodotto $B \cdot A$ perché il numero di colonne di B è diverso dal numero di righe di A.

Esempio 3.3.3. Un altro esempio che sarà molto utile quando si parlerà di sistemi lineari è il prodotto di una matrice per un vettore, intendendo quest'ultimo come matrice in $\mathfrak{M}(n,1)$. Si considerino la matrice $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ e i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ $(\equiv \mathfrak{M}(3,1))$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ $(\equiv \mathfrak{M}(2,1))$ definiti come segue

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} . \tag{3.3.24}$$

Allora il prodotto $A \cdot \mathbf{x} \in \mathfrak{M}(2,0)$ $(\equiv \mathbb{R}^2)$ è dato dall'espressione seguente

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 \\ -3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -3x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} . \tag{3.3.25}$$

Perciò ha senso considerare l'equazione

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 , \tag{3.3.26}$$

che equivale (per via della definizione (2.2.4) di uguaglianza tra vettori), al sistema in due equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} . \tag{3.3.27}$$

Lemma 3.3.3. Il prodotto di matrici (3.3.18) soddisfa le seguenti proprietà.

i. Associatività

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C , \qquad \forall A \in \mathfrak{M}(m,n) ,\ B \in \mathfrak{M}(n,p) ,\ C \in \mathfrak{M}(p,q) . \tag{3.3.28}$$

ii. Distributività rispetto alla somma di matrici

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C , \qquad \forall A \in \mathfrak{M}(m,n) ,\ B, C \in \mathfrak{M}(n,p) . \tag{3.3.29}$$

Osservazione 3.3.3. Sebbene queste proprietà rendano il prodotto di matrici (3.3.18) simile al prodotto di scalari, in realtà i due si distinguono per altri motivi. Ad esempio, per il prodotto di matrici si ha quanto segue.

i. *Non è commutativo*, nel senso che

$$A \cdot B \neq B \cdot A \,. \tag{3.3.30}$$

Uno dei due prodotti potrebbe addirittura non essere definito (si veda l'Esempio 3.3.2).

ii. *Non vale la proprietà di annullamento del prodotto*, nel senso che ([16])

$$A \cdot B = A \cdot C \quad \text{e} \quad A \neq \mathbb{0}_n \qquad \not\Rightarrow \qquad B = C \,. \tag{3.3.31}$$

Esempio 3.3.4. Si considerino due matrici $A \in \mathfrak{M}(m,n)$, $B \in \mathfrak{M}(n,m)$ con $m,n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Allora il prodotto $A \cdot B$ è una matrice in $\mathfrak{M}(m,m)$, mentre il prodotto $B \cdot A$ è una matrice in $\mathfrak{M}(n,n)$; chiaramente per $m \neq n$ gli spazi $\mathfrak{M}(m,m)$ e $\mathfrak{M}(n,n)$ sono diversi (in quanto costituiti da matrici di ordini differenti), quindi i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono a loro volta matrici diverse.

Si considerino ora le matrici quadrate $A, B, C \in \mathfrak{M}(2)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}. \tag{3.3.32}$$

I prodotti $A \cdot B$, $B \cdot A \in \mathfrak{M}(2)$ sono entrambi definiti e sono rispettivamente dati dalle espressioni

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}. \tag{3.3.33}$$

Questi risultati mostrano chiaramente che il prodotto di matrici non è commutativo e non soddisfa la proprietà di annullamento. Infatti si ha

$$A \cdot B \neq B \cdot A \qquad \text{e} \qquad A \cdot B = \mathbb{0}_2 \quad \text{con} \;\; A, B \neq \mathbb{0}_2 \,. \tag{3.3.34}$$

Consideriamo ancora il caso delle matrici quadrate, questa volta di ordine n qualunque. Questo è interessante perchè da $A, B \in \mathfrak{M}(n)$ segue che sono ben definite $A + B, A \cdot B \in \mathfrak{M}(n)$.

Proposizione 3.3.1. Con le operazioni $A, B \mapsto A + B$ e $A, B \mapsto A \cdot B$, $\mathfrak{M}(n)$ è un anello ([17]). La matrice identità $\mathbb{1}_n$ definita a pag. 16, Eq. (3.2.12) ha la proprietà $A.\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n.A = A$ per ogni $A \in \mathfrak{M}(n)$, cioè funge da unità dell'anello.

L'esempio precedente ci dice che l'anello $\mathfrak{M}(2)$ non è commutativo. Più in generale, si può far vedere che $\mathfrak{M}(n)$ non è commutativo per ogni $n \geqslant 2$.

Definizione 3.3.6. Si definisce la *trasposizione* di matrici come la mappa

$$\cdot^T : \mathfrak{M}(m,n) \to \mathfrak{M}(n,m)\,, \qquad A \mapsto A^T\,, \tag{3.3.35}$$

tale che gli elementi della matrice trasposta A^T siano dati dalla relazione

$$a^T_{ij} = a_{ji}\,, \qquad \forall\, i=1,\ldots,m\,,\; j=1,\ldots,n\,. \tag{3.3.36}$$

[16] Posto $D := B - C$, ciò equivale a dire che

$$A \cdot D = \mathbb{0}_n \quad \text{e} \quad A \neq \mathbb{0}_n \qquad \not\Rightarrow \qquad D = \mathbb{0}_n \,.$$

[17] per la definizione di anello, si veda: L. Pizzocchero, appunti di Matematica del continuo, Capitolo 2.

Lemma 3.3.4. La trasposizione di matrici (3.3.35) soddisfa le proprietà seguenti.

1) Involutività
$$(A^T)^T = A\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n)\ . \tag{3.3.37}$$

2) Distributività rispetto alla somma di matrici e al prodotto per uno scalare
$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad \text{e} \qquad (\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T\,, \qquad \forall\, A, B \in \mathfrak{M}(m,n)\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ . \tag{3.3.38}$$

3) Composizione con il prodotto di matrici ([18])
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n)\,,\ B \in \mathfrak{M}(n,p)\ . \tag{3.3.39}$$

Esempio 3.3.5. Si consideri la matrice $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ definita come
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.3.40}$$

La matrice trasposta di A è
$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.3.41}$$

Definizione 3.3.7. Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ si dice *simmetrica* se
$$A^T = A\ . \tag{3.3.42}$$

Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ si dice *antisimmetrica* se
$$A^T = -A\ . \tag{3.3.43}$$

[18] Più in generale, per ogni famiglia $A_1, \ldots, A_k$ per cui sia definito il prodotto $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$, vale
$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^T = A_k^T \cdot \ldots \cdot A_2^T \cdot A_1^T\ ,$$
cioé la trasposta della matrice prodotto è il prodotto delle matrici trasposte.

3.4 Nucleo e Immagine di una applicazione lineare. Isomorfismi e applicazioni inverse

Consideriamo due spazi vettoriali V, V'.

Definizione 3.4.1. Sia $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ una applicazione lineare. Si conviene quanto segue:

1) Il *nucleo* (o *kernel*) di L è il sottoinsieme $\mathrm{Ker}L \subset V$ definito come

$$\mathrm{Ker}L := \{v \in V \mid L\,v = o' \;\text{ in } V'\}\,, \tag{3.4.1}$$

dove si indica con o' il vettore nullo nello spazio vettoriale V'.

2) L'*immagine* di L è il sottoinsieme $\mathrm{Im}L \subset V'$ definito come

$$\mathrm{Im}L := \{w \in V' \mid \exists\, v \in V \text{ tale che } w = L\,v \;\text{ in } V'\}\,. \tag{3.4.2}$$

Esempio 3.4.1. Si consideri l'applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a cui è associata tramite la biezione (3.2.20) la matrice

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,. \tag{3.4.3}$$

Per determinare il nucleo $\mathrm{Ker}L$, si devono trovare i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $L\mathbf{x} = A_L \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^2$, cioè

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \doteq A_L \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}\,. \tag{3.4.4}$$

Ciò equivale a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}\,. \tag{3.4.5}$$

Si trova che l'insieme delle soluzioni è

$$x_1 = x\,, \qquad x_2 = x\,, \qquad x_3 = -2x\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.4.6}$$

perciò si ha che

$$\mathrm{Ker}L = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}\,,\;\; x \in \mathbb{R} \right\}\,. \tag{3.4.7}$$

Lemma 3.4.1. Sia $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ una applicazione lineare. Allora valgono i seguenti risultati.

1) Il nucleo $\mathrm{Ker}L$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V.

2) L'immagine $\mathrm{Im}L$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V'.

Lemma 3.4.2. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ è iniettiva se e solo se il suo nucleo $\mathrm{Ker}L$ è costituito dal solo vettore nullo $o \in V$

$$L \text{ iniettiva} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}L = \{o\}\,. \tag{3.4.8}$$

Definizione 3.4.2. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ è detta *invertibile* se esiste una seconda applicazione lineare $M \in \mathfrak{L}(V', V)$ tale che

$$M \circ L = id_V \qquad \text{e} \qquad L \circ M = id_{V'} \ . \tag{3.4.9}$$

Lemma 3.4.3. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ è invertibilie se e solo e è biunivoca (cioè iniettiva e suriettiva) tra gli insiemi V e V'. Inoltre, se L è invertibile, la M di cui sopra è unica e coincide con l'usuale applicazione inversa di L. ([19]).

Definizione 3.4.3. D'ora in avanti, la M nella (3.4.9) si indicherà con L^{-1} (come si fa di solito con l'applicazione inversa).

Definizione 3.4.4. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ biunivoca (ovvero, invertibile) è detta un *isomorfismo* tra gli spazi vettoriali V e V'. Si dice che gli spazi V e V' sono *isomorfi* .

Si hanno seguente risultati, assai importanti.

Proposizione 3.4.1. Ogni spazio vettoriale V di dimensione $n \in \mathbb{N}$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Più precisamente, ogni base $v_1, ..., v_n$ di V induce un isomorfismo lineare

$$I : V \to \mathbb{R}^n \ ; \tag{3.4.10}$$

questo è l'applicazione che trasforma un vettore $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in V$ $(\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R})$ in

$$Iv := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} . \tag{3.4.11}$$

Proposizione 3.4.2. Due spazi vettoriali V, V' di dimensioni $n, n' \in \mathbb{N}$ sono isomorfi se e solo se $n = n'$.

3.5 Matrice di una applicazione lineare rispetto a due basi

Consideriamo due spazi vettoriali V, V' di dimensioni finite n, n' rispettivamente, ed una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$. Scegliamo due basi $v_1, ...v_n$ e $v'_1, ..., v'_{n'}$ in V, V' rispettivamente; secondo la Proposizione precedente, queste inducono due isomorfismi lineari

$$I : V \to \mathbb{R}^n \ , \qquad I' : V' \to \mathbb{R}^{n'} \tag{3.5.1}$$

Consideriamo la catena di applicazioni lineari $I^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$, $L : V \to V'$ e $I' : V' \to \mathbb{R}^{n'}$; da questa otteniamo, per composizione, una applicazione lineare

$$I' \circ L \circ I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'} \ . \tag{3.5.2}$$

D'altra parte ad $I' \circ L \circ I \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n'})$ possiamo associare una matrice in $A \in \mathfrak{M}(n', n)$, che dipende da L ma anche da I, I', ovvero dalle basi scelte:

$$A \equiv A_{L; v_1, ..., v_n; v'_1, ..., v'_{n'}} \ . \tag{3.5.3}$$

Definizione 3.5.1. La A di cui sopra si chiama la matrice della applicazione lineare L rispetto alle basi $v_1, ..., v_n$ e $v'_1, ..., v'_n$.

[19] Si noti che l'enunciato non è banale: la biunivocità di L garantisce l'esistenza di una mappa inversa L^{-1} di cui però non è garantita la linearità, che è invece assicurata dal lemma enunciato.

3.6 Traccia di una matrice quadrata

Definizione 3.6.1. Si definisce la *traccia* di una matrice quadrata come la mappa

$$\mathrm{Tr}\, : \mathfrak{M}(n) \,\to\, \mathbb{R}\,, \qquad A \,\mapsto\, \mathrm{Tr}\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ , \tag{3.6.1}$$

che ad A associa la somma di tutti gli elementi sulla diagonale principale.

Esempio 3.6.1. Si consideri la matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(4)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 11 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.6.2}$$

La traccia di A è data dall'espressione

$$\mathrm{Tr}\, A = 7 + 4 + (-6) + 0 = 5\,. \tag{3.6.3}$$

Lemma 3.6.1. La traccia ha le seguenti proprietà.

1) Ciclicità

$$\mathrm{Tr}\,(A \cdot B) = \mathrm{Tr}\,(B \cdot A)\,, \qquad \forall\, A, B \in M(n)\ . \tag{3.6.4}$$

2) Invarianza per trasposizione

$$\mathrm{Tr}\, A^T = \mathrm{Tr}\, A\,, \qquad \forall\, A \in M(n)\ . \tag{3.6.5}$$

3.7 Determinante di una matrice quadrata

Definizione 3.7.1. Sia $A \in \mathfrak{M}(n)$ una matrice quadrata. Si indicherà con A_{ij} la sottomatrice di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempi 3.7.1. i) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2). \tag{3.7.1}$$

Allora $A_{11} = (a_{22})$, $A_{12} = (a_{21})$, ecc.
ii) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3). \tag{3.7.2}$$

Allora $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, ecc.

Definizione 3.7.2. Il *determinante* per le matrici quadrate è la mappa

$$\det : \mathfrak{M}(n) \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \det A, \tag{3.7.3}$$

definita induttivamente come segue.

i. Per $n=1$, il determinante di una matrice $A = (a) \in \mathfrak{M}(1)\ (\equiv \mathbb{R})$ è

$$\det A := a\ . \tag{3.7.4}$$

ii. Per $n>1$, il determinante di una matrice $A \in \mathfrak{M}(n)$ è dato dalla *formula di Laplace*

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} \det A_{1n}\ . \tag{3.7.5}$$

Osservazione 3.7.1. Se $A \in \mathfrak{M}(2)$ il calcolo del determinante di A si riduce a

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ . \tag{3.7.6}$$

Se $A \in \mathfrak{M}(3)$ il calcolo del determinante di A si riduce a

$$\det A := a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\ , \tag{3.7.7}$$

dove i determinanti delle matrici quadrate di ordine 2 restanti sono calcolati secondo la (3.7.6).

Esempio 3.7.1. Si consideri la matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(3)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.7.8}$$

Il suo determinante è

$$\begin{aligned} \det A &= (-2) \det \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 6 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= (-2)\cdot(3\cdot0 - 8\cdot(-1)) - 4\cdot(0\cdot0 - 8\cdot5) + 6\cdot(0\cdot(-1) - 3\cdot5) = 54\ . \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

Il determinante ha una serie di proprietà interessanti (che possono essere utili anche per calcolarlo):

Lemma 3.7.1. Indicando con A, B due matrici in $\mathfrak{M}(n)$, vale quanto segue:

1) Invarianza per trasposizione
$$\det A^T = \det A\ . \tag{3.7.10}$$

2) Spostamenti di righe e colonne. Sia $\tilde{A}$ la matrice ottenuta da A spostando una riga (o una colonna) di p posizioni. Allora vale
$$\det \tilde{A} = (-1)^p \det A\ . \tag{3.7.11}$$
Se $\tilde{A}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro due righe (o due colonne), allora si ha
$$\det \tilde{A} = -\det A\ . \tag{3.7.12}$$

3) Dipendenza lineare di righe o colonne. Le righe (o le colonne) di A, intese come vettori in $\mathbb{R}^n$, sono linearmente dipendenti se e solo se
$$\det A = 0\ . \tag{3.7.13}$$

4) Compatibilità con il prodotto di matrici. Vale la *formula di Binet*
$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B\ . \tag{3.7.14}$$

5) Se $A \in \mathfrak{M}(n)$ è una matrice triangolare (superiore o inferiore), in particolare se A è diagonale, il determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale
$$\det A \ =\ a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}\ . \tag{3.7.15}$$
In particolare, per il determinante della matrice identica si ha
$$\det \mathbb{1}_n = 1\ . \tag{3.7.16}$$

Osservazione 3.7.2. Il risultato 3) del Lemma 3.7.1 fornisce un buon metodo per determinare la dipendenza o indipendenza lineare di una famiglia di n vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n \in \mathbb{R}^n$. E' sufficiente considerare la matrice quadrata $X \in \mathfrak{M}(n)$ ottenuta affiancando i vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$
$$X := \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}\ , \tag{3.7.17}$$
e calcolarne il determinante. Allora i vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$ sono linearmente indipendenti (e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$) se e solo se il determinante della matrice X è non nullo
$$\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n \text{ linearmente indipendenti} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det X \neq 0\ . \tag{3.7.18}$$
Usando questo metodo si può verificare ad esempio, che i vettori di $\mathbb{R}^3$ introdotti a pag. 13, Eq. (2.3.20) sono una base: basta scrivere la matrice in $\mathfrak{M}(3)$ che ha come colonne questi vettori e verificare che il suo determinante è non nullo.

3.8 Matrici invertibili

Definizione 3.8.1. Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ è detta *invertibile* se esiste una seconda matrice quadrata $M \in \mathfrak{M}(n)$ tale che

$$A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{1}_n \qquad \text{in } \mathfrak{M}(n) . \tag{3.8.1}$$

Si può dimostrare che la M di cui sopra, se esiste, è unica.

Definizione 3.8.2. i) Se $A \in \mathfrak{M}(n)$ è invertibile, l'unica matrice M soddisfacente la (3.8.1) si chiama l'*inversa* di A; questa matrice si indica con A^{-1} (cosicchè la (3.8.1) diventa $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$).
ii) Il sottoinsieme della matrici quadrate di ordine n costituito dall'insieme di tutte matrici invertibili è detto *gruppo generale lineare* ([20]) ed è indicato con il simbolo $GL(n)$.

Proposizione 3.8.1. Valgono i seguenti risultati.

1) La matrice identica è invertibile e coincide con la sua inversa

$$\mathbb{1}_n \in GL(n) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{1}_n^{-1} = \mathbb{1}_n . \tag{3.8.2}$$

2) Siano $A, B \in GL(n)$. Allora la matrice prodotto $A \cdot B \in \mathfrak{M}(n)$ è anch'essa invertibile

$$A \cdot B \in GL(n) , \tag{3.8.3}$$

e vale la seguente relazione

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} . \tag{3.8.4}$$

3) Sia $A \in GL(n)$. Allora la matrice inversa A^{-1} è anche essa invertibile e la sua inversa è A:

$$A^{-1} \in GL(n) \qquad \text{e} \qquad (A^{-1})^{-1} = A . \tag{3.8.5}$$

Proposizione 3.8.2. Sia $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in sé, e sia $A_L \in \mathfrak{M}(n)$ la matrice quadrata ad essa associata per mezzo della biezione (3.2.20). Allora L è un isomorfismo se e solo se A_L è una matrice invertibile.

Ora veniamo ad un enunciato molto importante, che caratterizza l'invertibilità di una matrice A in termini del suo determinante e fornisce un metodo per calcolare A^{-1}.

[20] Chi conosce la definizione di gruppo noterà che, secondo la Proposizione 3.8.1, $GL(n)$ è un gruppo; gli aggettivi "generale" e "lineare" vengono usati per indicare questo particolare gruppo. Chi non conosce la definizione in questione può ignorare questo commento.

Proposizione 3.8.3. Sia $A \in \mathfrak{M}(n)$. Allora A è invertibile se e solo se il determinante di A è non nullo:

$$A \in GL(n) \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \, . \tag{3.8.6}$$

Supponendo $\det A \neq 0$, la matrice inversa di A è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^T \, , \tag{3.8.7}$$

dove T indica la trasposizione, e

$$c_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij} \tag{3.8.8}$$

(si ricordi che, secondo la Definizione 3.7.1, A_{ij} è la sottomatrice di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna).
Infine, il determinante della matrice inversa soddisfa

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \, . \tag{3.8.9}$$

Esempi 3.8.1. i) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2) \; ; \tag{3.8.10}$$

Supponiamo $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
A^{-1} si calcola usando le (3.8.7) (3.8.8) con $n = 2$. Risulta $c_{11} = a_{22}$, $c_{12} = -a_{21}$, $c_{21} = -a_{12}$, $c_{22} = a_{11}$ per cui $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T$, ovvero

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \, . \tag{3.8.11}$$

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.8.12}$$

risulta $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$ e

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \, . \tag{3.8.13}$$

Il risultato trovato può essere sottoposto a verifica ([21]).

[21] basta calcolare esplicitamente i prodotti $A \cdot A^{-1}$ e $A^{-1} \cdot A$ e verificare che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_2 \, .$$

Verifiche di questo tipo non sono indispensabili, e si possono omettere se si è sicuri di avere applicato correttamente la procedura per il calcolo di A^{-1} (in questo caso, la (3.8.11)).

ii) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3) \ ; \tag{3.8.14}$$

supponiamo $\det A \neq 0$. Le (3.8.7) (3.8.8) con $n = 3$ ci dicono

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T \ , \tag{3.8.15}$$

$$c_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ , \quad c_{12} = -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \ , \quad c_{13} = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \ , \tag{3.8.16}$$

$$c_{21} = -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ , \quad c_{22} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \ , \quad c_{23} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \ , \tag{3.8.17}$$

$$c_{31} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \ , \quad c_{32} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \ , \quad c_{33} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ . \tag{3.8.18}$$

Metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa

Nelle pagine precedenti abbiamo incontrato un metodo per calcolare la matrice inversa A^{-1}; ve ne sono altri. Qui vogliamo descrivere uno dei metodi alternativi, particolarmente efficace; si tratta del *metodo di Gauss* (una variante del quale sarà utilizzata nel seguito come tecnica risolutiva per i sistemi lineari).

Sia data $A \in \mathfrak{M}(n)$. Il metodo di Gauss consiste nei seguenti passaggi.

1. Si costruisce la matrice $(A \,|\, \mathbb{1}_n) \in \mathfrak{M}(n, 2n)$ accostando a destra della matrice $A \in \mathfrak{M}(n)$ la matrice identica $\mathbb{1}_n \in \mathfrak{M}(n)$

$$(A \,|\, \mathbb{1}_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) . \tag{3.8.19}$$

2. Si cerca di ridurre la matrice $(A \,|\, \mathbb{1}_n)$ alla forma $(\mathbb{1}_n \,|\, C)$, con $C \in \mathfrak{M}(n)$, cioè

$$(A \,|\, \mathbb{1}_n) \ \to \ (\mathbb{1}_n \,|\, C) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right) , \tag{3.8.20}$$

   per mezzo delle operazioni seguenti

   i. scambio di due righe;
   ii. moltiplicazione una riga per un numero reale diverso da zero;
   iii. somma di una riga con un multiplo (reale) di un'altra riga.

Si può dimostrare quanto segue:

Proposizione 3.8.4. $(A\,|\,\mathbb{1}_n)$ si può ridurre alla forma $(\mathbb{1}_n\,|\,C)$ con le operazioni elencate in 2. se e solo se A è invertibile. Inoltre, una volta effettuata la riduzione, l'inversa di A è

$$A^{-1} = C\ . \tag{3.8.21}$$

Come sappiamo, una $A \in \mathfrak{M}(n)$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. Perciò, se si vuole essere sicuri di potere effettuare la riduzione alla forma $(\mathbb{1}_n\,|\,C)$, ai passi 1. e 2. di prima si può premettere il passo

0. Verificare che $\det A \neq 0$.

Esempio 3.8.1. Si consideri la matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(2)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\ . \tag{3.8.22}$$

0. Il suo determinante è
$$\det A = 3\cdot 1 - (-2)\cdot(-1) = 1 \neq 0\ . \tag{3.8.23}$$

1. Consideriamo la matrice $(A\,|\,\mathbb{1}_2) \in \mathfrak{M}(2,4)$ ottenuta accostando a destra della matrice A la matrice identica $\mathbb{1}_2$
$$(A\,|\,\mathbb{1}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\ . \tag{3.8.24}$$

2. Eseguiamo questa sequenza di operazioni.
   i. moltiplicare la seconda riga per 3.
   ii. sommare la prima riga alla seconda riga.
   iii. sommare la seconda riga moltiplicata per 2 alla prima riga.
   iv. moltiplicare la prima riga per 1/3.

   Ecco il risultato:
$$\begin{gathered}\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{i} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{ii} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{iii} \\ \xrightarrow{iii} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{iv} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)\ .\end{gathered} \tag{3.8.25}$$

A questo punto, possiamo dire che la matrice inversa di A è ([22])

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ . \tag{3.8.26}$$

[22] Come verifica, si possono calcolare esplicitamente i prodotti $A \cdot A^{-1}$ e $A^{-1} \cdot A$ e controllare che
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_2\ .$$

3.9 Rango di una matrice

Concludiamo questa sezione introducendo il concetto di rango di una matrice e le nozioni ad esso associate; queste saranno utilizzate nella sezione seguente per discutere la risolubilità dei sistemi lineari.

Definizione 3.9.1. Il *rango* di una matrice $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ è definito come segue

$$\mathrm{rk}A := \text{massimo numero di colonne di } A \text{ linearmente indipendenti} \, . \tag{3.9.1}$$

Il significato profondo della definizione precedente può essere ben compreso in termini della applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A\mathbf{x} := A \cdot \mathbf{x}$. Non è difficile verificare che le colonne della matrice A generano il sottospazio $\mathrm{Im}L_A \subset \mathbb{R}^m$ ([23]). Da questa osservazione segue:

Proposizione 3.9.1. Il rango $\mathrm{rk}A$ è uguale alla dimensione del sottospazio $\mathrm{Im}L_A$.

Lemma 3.9.1. Il rango di una matrice ha la proprietà seguenti.

1) Equivalenza con il massimo numero di righe linearmente indipendenti

$$\mathrm{rk}A = \text{massimo numero di righe di } A \text{ linearmente indipendenti} \, . \tag{3.9.2}$$

2) Invarianza per trasposizione

$$\mathrm{rk}(A^T) = \mathrm{rk}A \, , \qquad \forall \, A \in \mathfrak{M}(m,n) \, . \tag{3.9.3}$$

3) Limitazioni in termini del numero di righe e del numero di colonne della matrice

$$\mathrm{rk}A \leq \min \{ \, m \, , \, n \, \} \, , \qquad \forall \, A \in \mathfrak{M}(m,n) \, . \tag{3.9.4}$$

4) Comportamento rispetto al prodotto di matrici

$$\mathrm{rk}(A \cdot B) \leq \min \{ \, \mathrm{rk}A \, , \, \mathrm{rk}B \, \} \, , \qquad \forall \, A \in \mathfrak{M}(m,n) \, , \; B \in \mathfrak{M}(n,p) \, . \tag{3.9.5}$$

[23] infatti, considerando la base canonica $\mathbf{e}_1, ...\mathbf{e}_n$ di $\mathbb{R}^n$, possiamo dire che $\mathrm{Im}L_A$ è generato dai vettori $A \cdot \mathbf{e}_1, ..., A \cdot \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^m$; d'altra parte, questi coincidono con le colonne di A.

Ora illustriamo un metodo per calcolare il rango di una matrice; partiremo dalla seguente

Definizione 3.9.2. Sia $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ una matrice. Si dice che $B \in \mathfrak{M}(p,q)$, con $p \leq m$ e $q \leq n$, è una *sottomatrice* di A se può essere ottenuta da A eliminando $m-p$ righe ed $n-q$ colonne.

Esempio 3.9.1. Si considerino le matrici $A \in \mathfrak{M}(4,3)$ e $B \in \mathfrak{M}(2,2)$ definite come

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9.6}$$

Allora B è la sottomatrice di A ottenuta eliminando la terza riga, e la prima e la terza colonna.

Dopo questi preliminari sulle sottomatrici, possiamo caratterizzare il rango nel modo seguente:

Proposizione 3.9.2. Il rango di una matrice $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ è uguale all'ordine della più grande sottomatrice quadrata invertibile di A ([24]):

$$\mathrm{rk}A = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, B \in \mathfrak{M}(n) \text{ sottomatrice di } A \text{ con } \det B \neq 0\}. \tag{3.9.7}$$

Esempio 3.9.2. Si consideri la matrice $A \in \mathfrak{M}(3,4)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9.8}$$

Le sottomatrici quadrate di A di ordine massimo (ordine 3) sono quelle ottenute da A eliminando una colonna qualsiasi; ad esempio, eliminando la prima colonna di A si ottiene la sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3). \tag{3.9.9}$$

il cui determinante è

$$\begin{aligned} \det B &:= 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 11 \neq 0. \end{aligned} \tag{3.9.10}$$

Poiché questo determinante è non nullo, la sottomatrice $B \in \mathfrak{M}(3)$ è invertibile e si può allora concludere che

$$\mathrm{rk}A = 3. \tag{3.9.11}$$

[24] Cioè, per il punto 2) del Lemma 3.8.1, della più grande sottomatrice quadrata con determinante non nullo.

Esempio 3.9.3. Si consideri la matrice $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} . \tag{3.9.12}$$

Le sottomatrici quadrate di A di ordine massimo (ordine 2) sono quelle ottenute da A eliminando una colonna qualsiasi

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} , \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} , \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} , \tag{3.9.13}$$

i cui determinanti si calcolano facilmente ottenendo

$$\det B_1 = \det B_2 = \det B_3 = 0 . \tag{3.9.14}$$

Perciò, dato che tutte le sottomatrici di ordine 2 hanno determinante nullo (e quindi non sono invertibili), si ha

$$\mathrm{rk} A < 2 . \tag{3.9.15}$$

D'altra parte esistono sottomatrici di ordine 1 (cioè componenti) di A non nulle, e quindi invertibili, perciò si può concludere che

$$\mathrm{rk} A = 1 . \tag{3.9.16}$$

Per concludere, segnaliamo una semplice, ma importante conseguenza della Proposizione 3.9.2:

Corollario 3.9.1. Si consideri una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$. Allora

$$\mathrm{rk} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 . \tag{3.9.17}$$

4 Sistemi Lineari

4.1 Generalità. Rappresentazione matriciale

La teoria degli spazi vettoriali, delle applicazioni lineari e del calcolo matriciale analizzata finora costituisce il linguaggio corretto per lo studio e la risoluzione dei sistemi lineari che verranno considerati in questa sezione.

Definizione 4.1.1. Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Un *sistema di m equazioni lineari* (detto anche *sistema lineare*) nelle n incognite reali $x_1, \ldots, x_n$ è una espressione della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{4.1.1}$$

in cui si suppongono noti i numeri reali $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$.
Un sistema di equazioni lineari si dice *omogeneo* se i coefficienti $b_1, \ldots, b_m$ sono tutti nulli.

E' chiaro che un sistema lineare di m equazioni lineari in n incognite come quello in Eq.(4.1.1) può essere riscritto mella *forma matriciale*

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{4.1.2}$$

in cui $A \in \mathfrak{M}(m,n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sono rispettivamente detti *matrice dei coefficienti*, *vettore delle incognite* e *vettore dei termini noti*; questi sono definiti come segue

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

([25]). In particolare un sistema lineare omogeneo ammette la rappresentazione matriciale

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \tag{4.1.4}$$

in cui $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ è il vettore nullo.

Definizione 4.1.2. Si consideri un sistema lineare di m equazioni in n incognite della forma (4.1.1), ovvero (4.1.2). Si conviene quanto segue.

1) Una *soluzione* di tale sistema è una qualsiasi n-upla di numeri reali che, sostituita alle incognite, soddisfa simultaneamente tutte le equazioni (4.1.1). Equivalentemente, una soluzione del sistema è un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa la (4.1.2).

2) Il sistema si dice *risolubile* se ammette almeno una soluzione, e in tal caso si dice che le equazioni del sistema sono *compatibili*. Il sistema si dice invece *non risolubile* (o *impossibile*) se non esiste neanche una soluzione.

[25] Quanto affermato qui è già stato fatto in un caso particolare: si veda l'Esempio 3.3.3 di pag. 21 in cui $m = 2$, $n = 3$.

3) Il sistema si dice *determinato* se è risolubile ed ammette una unica soluzione.

4) Il sistema si dice *indeterminato* se è risolubile ed ammette infinite soluzioni.

5) Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se ammettono le stesse soluzioni.

4.2 Sviluppi nella teoria dei sistemi lineari.

Il caso omogeneo. Teorema di nullità più rango

Consideriamo un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, scritto nella forma (4.1.4) $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. E' evidente che questo ammette sempre come soluzione il vettore nullo

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n . \tag{4.2.1}$$

Tra poco vedremo che possono esistere altre soluziono oltre a quella nulla. Consideriamo l'insieme di tutte le le soluzioni di (4.1.4); questo coincide chiaramente con il *nucleo* dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A\mathbf{x} := A \cdot \mathbf{x}$:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \ker L_A . \tag{4.2.2}$$

Ricordiamo che $\ker L_A$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2.1. *(Teorema di nullità più rango).* Sia $r := \mathrm{rk}(A)$; allora

$$\dim \ker L_A = n - r . \tag{4.2.3}$$

La proposizione precedente ci permette di "contare" le soluzioni del sistema omogeneo $A \cdot \mathbf{x} = 0$. Tenendo presente che in ogni caso $r \leqslant n$ ([26]), possiamo dire quanto segue:

i) Se $r = n$, $\ker L_A$ è formato dal solo vettore nullo. In questo caso il sistema $A \cdot \mathbf{x} = 0$ ha una ed una sola soluzione $\mathbf{x} = 0$ (e dunque, è determinato).

ii) Se $r < n$, $\ker L_A$ possiede una base $\mathbf{k}_1, ...\mathbf{k}_{n-r}$; le soluzioni del sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ sono tutte e sole le combinazioni lineari

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{k}_1 + ... + \alpha_{n-r}\mathbf{k}_{n-r} \qquad (\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}) ; \tag{4.2.4}$$

Abbiamo dunque un insieme di infinite soluzioni, dipendenti da $n - r$ parametri reali $\alpha_1, ..., \alpha_{n-r}$; si usa dire che le soluzioni del sistema sono ∞^{n-r}. Naturalmente, in questo caso il sistema è indeterminato.

[26]per il punto 3) del Lemma 3.9.1, il rango di una matrice non può essere maggiore del numero di righe o del numero di colonne.

Il caso generale. Teorema di Rouché-Capelli

Ora consideriamo un generico sistema di m equazioni in n incognite, con la forma matriciale (4.1.2) $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$; ricordiamo che $A \in \mathfrak{M}(m, n)$.

Definizione 4.2.1. La *matrice associata* al sistema è la matrice $(A \,|\, \mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n{+}1)$ ottenuta accostando il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathfrak{M}(m, 0)\,(\equiv \mathbb{R}^m)$ alla matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(m, n)$

$$(A \,|\, \mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) . \tag{4.2.5}$$

Si dirà che un sistema lineare è costituito da equazioni linearmente indipendenti (o dipendenti) se le righe della matrice ad esso associata lo sono.

Teorema 4.2.2. (*Teorema di Rouché-Capelli*) Un sistema lineare la cui rappresentazione matriciale sia come nell'Eq.(4.1.2) è risolubile se e solo se il rango della matrice ad esso associata $(A \,|\, \mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n{+}1)$ è uguale al rango della matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(m, n)$

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \ \text{ è risolubile} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{rk}(A \,|\, \mathbf{b}) = \mathrm{rk}A \equiv r \ . \tag{4.2.6}$$

Abbiamo già detto che $\mathrm{rk}A \leqslant n$, e qui lo ripetiamo.

Proposizione 4.2.1. Supponiamo che il sistema (4.1.2) possieda almeno una soluzione, qui chiamata $\mathbf{s}$, cosicchè

$$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \ , \quad A \cdot \mathbf{s} = \mathbf{b} \tag{4.2.7}$$

(secondo il teorema precedente, questo accade se e solo se $\mathrm{rk}(A \,|\, \mathbf{b}) = \mathrm{rk}A \equiv r$).
Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ è soluzione di (4.1.2) se e solo se $\mathbf{x}$ è la somma tra $\mathbf{s}$ e una soluzione del sistema omogeneo $A \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}$ (ovvero, la somma tra $\mathbf{s}$ e un elemento di $\ker L_A$). Dunque, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{z} \text{ dove } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \text{ è t.c. } A \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{z} \ , \ \mathbf{z} \in \ker L_A \ . \tag{4.2.8}$$

Supponiamo $\mathrm{rk}(A \,|\, \mathbf{b}) = \mathrm{rk}A \equiv r$, cosicchè (4.1.2) ha almeno una soluzione $\mathbf{s}$. Usando la Proposizione precedente, insieme al teorema di nullità più rango (Teor. 4.2.1), possiamo "contare" le soluzioni del sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si ottengono le conclusioni seguenti:

i) Sia $r = n$. Allora $\ker L_A$ è formato dal solo vettore $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. In questo caso, confrontando con la (4.2.8), vediamo che $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{s}$; dunque, il sistema è determinato.

ii) Sia $r < n$. Allora $\ker L_A$ possiede una base $\mathbf{k}_1, ...\mathbf{k}_{n-r}$; da qui e dalla (4.2.8) otteniamo che le soluzioni del sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono tutte e sole le somme del tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \alpha_1 \mathbf{k}_1 + ... + \alpha_{n-r} \mathbf{k}_{n-r} \qquad (\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}) \ ; \tag{4.2.9}$$

Abbiamo dunque un insieme di infinite soluzioni, dipendenti da $n - r$ parametri reali $\alpha_1, ..., \alpha_{n-r}$; si usa dire che le soluzioni del sistema sono ∞^{n-r}. Naturalmente, in questo caso il sistema è indeterminato.

Lemma 4.2.1. Ogni sistema lineare è equivalente al sistema lineare da esso ottenuto tenendo solo le equazioni linearmente indipendenti, ed eliminando le altre equazioni.

Osservazione 4.2.1. Per via del Lemma 4.2.1, un qualsiasi sistema lineare di m equazioni in n incognite risolubile è equivalente ad un sistema di r equazioni in n incognite, con $r = \mathrm{rk}A$, ottenuto dal sistema lineare di partenza eliminando $m - r$ equazioni linearmente dipendenti dalle equazioni di partenza.

4.3 Metodo risolutivo di Gauss

Si consideri un sistema lineare di m equazioni in n incognite, con la rappresentazioen matriciale (4.1.2) $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $A \in \mathfrak{M}(m, n)$. Il *metodo di Gauss* per studiare il sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ consiste nei seguenti passaggi.

1. Si considera la matrice associata al sistema $(A \,|\, \mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n+1)$

$$(A \,|\, \mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) . \tag{4.3.1}$$

2. Si riduce la matrice associata $(A \mid \mathbf{b})$ ad una matrice della forma seguente, in cui $r \in \mathbb{N}$ e $r \leqslant m, n$, $D_{r,n-r} \in \mathfrak{M}(r, n-r)$ è una matrice qualsiasi, $\mathbb{0}_{a,b}$ è una matrice di ordine (a, b) con tutte le componenti nulle, e $\mathbf{c}_r \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{c}_{m-r} \in R^{n-r}$ sono vettori qualsiasi:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_r & D_{r,n-r} & \mathbf{c}_r \\ \mathbb{0}_{m-r,r} & \mathbb{0}_{m-r,n-r} & \mathbf{c}_{m-r} \end{array}\right) . \tag{4.3.2}$$

   Si deve pervenire alla forma (4.3.2) per mezzo delle seguenti operazioni:

   i. scambio di due righe;
   ii. moltiplicazione di una riga per un numero reale diverso da zero;
   iii. somma di una riga con un multiplo di un'altra riga.

   Si dimostra che è sempre possibile effettuare la riduzione di cui sopra, e che il numero r nella (4.3.2) coincide con $\mathrm{rk}A$.

3. Si dimostra anche che il sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & D_{r,n-r} \\ \mathbb{0}_{m-r,r} & \mathbb{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_r \\ \mathbf{c}_{m-r} \end{pmatrix} . \tag{4.3.3}$$

   Quest'ultimo sistema si sudia molto facilmente: infatti, scrivendo un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_{n-r} \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r , \quad \mathbf{x}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-r} , \tag{4.3.4}$$

la (4.3.3) diventa

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & D_{r,n-r} \\ \mathbb{0}_{m-r,r} & \mathbb{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_r \\ \mathbf{c}_{m-r} \end{pmatrix} ,$$

equivalente alla coppia

$$\mathbf{x}_r + D_{r,n-r} \cdot \mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{c}_r \ , \qquad \mathbf{0}_{m-r} = \mathbf{c}_{m-r} \tag{4.3.5}$$

($\mathbf{0}_{m-r}$ indica il vettore nullo di $\mathbb{R}^{m-r}$).

A questo punto possono verificarsi due casi:

3a. $\mathbf{c}_{m-r} \neq \mathbf{0}_{m-r}$. Allora la seconda delle equazioni (4.3.5) non si può soddisfare. Dunque il sistema (4.3.3) è *impossibile*, e lo stesso vale per il sistema di partenza $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3b. $\mathbf{c}_{m-r} = \mathbf{0}_{m-r}$. Allora la seconda equazione (4.3.5) è soddisfatta, e la prima ci dice

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{c}_r - D_{r,n-r} \cdot \mathbf{x}_{n-r} \ , \qquad \mathbf{x}_{n-r} \in \mathbb{R}^{n-r} \text{ arbitrario .} \tag{4.3.6}$$

Dunque il sistema (4.3.3) è *risolubile*, e lo stesso vale per il suo equivalente $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Le soluzioni dei due sistemi sono tutti e soli i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ descritti dalla (4.3.6), le cui componenti sono così determinate:

i. le ultime $n-r$ componenti di $\mathbf{x}$ sono dei parametri arbitrari $x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

ii. le prime r componenti di $\mathbf{x}$ sono date da

$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j \ , \qquad \text{per } i = 1, \ldots, r \ , \tag{4.3.7}$$

dove c_i sono le componenti di $\mathbf{c}_r$ e d_{ij} gli elementi di matrice di $D_{r,n-r}$.

Naturalmente, se $r = n$ non abbiamo parametri arbitrari e c'è un'unica soluzione $\mathbf{x}$. Se $r < n$, le soluzioni $\mathbf{x}$ sono ∞^{n-r}.

Osservazione 4.3.1. Le operazioni i,ii,iii del punto 2 del metodo risolutivo di Gauss corrispondono rispettivamente alle seguenti operazioni sul sistema lineare di partenza.

i. Scambio di due equazioni nel sistema lineare.

ii. Moltiplicazione per un numero reale diverso da zero a destra e sinistra dell'uguale di una delle equazioni del sistema lineare.

iii. Somma termine a termine di una equazione con un multiplo (reale) di un'altra equazione del sistema lineare.

Osservazione 4.3.2. Come si vede, il punto 3. dello schema precedene permette di stabilire la risolubilità del sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Volendo, già prima di avviare la procedura 1.2.3, si può stabilire la risolubilità del sistema sfruttando il teorema di Rouché-Capelli, cioè eseguendo questa operazione:

0. controllare che risulti $\mathrm{rk} A = \mathrm{rk}(A|\mathbf{b})$.

Esempio 4.3.1. Si consideri il sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} -x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases} . \tag{4.3.8}$$

Questo sistema può essere riscritto in forma matriciale come

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.9}$$

Analizziamo il sistema con la procedura descritta prima:

0. (Un controllo legato al teorema di Rouchè-Capelli, che si può anche omettere). Si verifica che

$$\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}(A\,|\,\mathbf{b}) = 3\ , \tag{4.3.10}$$

perciò il sistema è risolubile ed ammette ∞^1 soluzioni.

1. Si considera la *matrice associata* $(A\,|\,\mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(3,5)$, ottenuta accostando il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ($\equiv \mathfrak{M}(3,0)$) alla matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(3,4)$:

$$(A\,|\,\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right). \tag{4.3.11}$$

2. Si considera la sequenza di operazioni sotto riportata:
   i. Si scambiano la prima e la seconda riga.
   ii. Si somma alla terza riga la prima.
   iii. Si somma alla terza riga la seconda moltiplicata per -1.
   iv. Si moltiplica la terza riga per $-1/2$ e la seconda riga per -1.
   v. Si somma alla seconda riga la terza moltiplicata per 5.
   vi. Si somma alla prima riga la terza riga moltiplicata per -3 e la seconda riga moltiplicata per -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{i} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{ii} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{iii}$$
$$\xrightarrow{iii} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{iv} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{v}$$
$$\xrightarrow{v} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{vi} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right). \tag{4.3.12}$$

3. Sulla base del punto precedente, il sistema (4.3.9) equivale al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.13}$$

ovvero:

$$x_1 + x_4 = -2 \ , \qquad x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \ , \qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1 \ . \tag{4.3.14}$$

Le soluzioni di questo sistema, e del sistema di partenza (4.3.9), sono i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ con componenti

$$x_1 = -2 - x_4 \ , \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \ , \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_4 \ , \quad x_4 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.} \tag{4.3.15}$$

Questi vettori hanno la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 - x_4 \\ -\frac{1}{2}x_4 \\ 1 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \ , \qquad x_4 \in \mathbb{R} \ . \tag{4.3.16}$$

4.4 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite, con una matrice invertibile

Si consideri un sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{con} \quad A \in \mathfrak{M}(n) \text{ t.c. } \det A \neq 0 \; . \tag{4.4.1}$$

Come sappiamo, la condizione $\det A \neq 0$ equivale alla invertibilità di A. Il teorema di Rouché-Capelli permette di dimostrare facilmente il seguente Corollario.

Corollario 4.4.1. Un sistema lineare come quello in Eq.(4.4.1) è determinato.

Nel caso di sistemi lineari come quello in Eq.(4.4.1) esistono diversi metodi risolutivi. Uno di questi è il metodo di Gauss (valido per sistemi lineari qualsiasi) analizzato precedentemente. Altri metodi, validi *solo per sistemi lineari del tipo* (4.4.1) sono il metodo della matrice inversa e il metodo di Cramer che verranno ora discussi.

Il metodo della matrice inversa

1. Si stabilisce se il sistema lineare è del tipo (4.4.1) verificando che il determinante della matrice dei coefficienti sia non nullo

$$\det A \neq 0 \; . \tag{4.4.2}$$

2. Si calcola la matrice inversa $A^{-1} \in GL(n)$ ([27]), ad esempio con il metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa analizzato in precedenza.

3. La soluzione è ottenuta moltiplicando a sinistra per la matrice inversa $A^{-1} \in GL(n)$ il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ($\equiv \mathfrak{M}(n,1)$) ([28])

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \; . \tag{4.4.6}$$

---

[27] L'esistenza della matrice inversa $A^{-1} \in GL(n)$ è garantita dal fatto che la matrice dei coefficienti è invertibile $A \in GL(n)$ (si veda il punto 6) del Lemma 3.8.1).

[28] La dimostrazione è molto semplice. Si procede nel modo seguente.

i. Si moltiplicano a sinistra le espressioni su entrambi i lati dell'uguaglianza nell'equazione (4.4.1) per la matrice inversa A^{-1}, ottenendo

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \; . \tag{4.4.3}$$

ii. A questo punto, si ricordi che

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \mathbf{x} \; , \qquad A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n \; , \qquad \mathbb{1}_n \mathbf{x} = \mathbf{x} \; , \tag{4.4.4}$$

rispettivamente per l'associatività del prodotto di matrici, per la definizione di matrice inversa e per la definizione di matrice identica. Quindi, ricapitolando, l'equazione (4.4.3) permette di determinare la soluzione $\mathbf{x}$ come

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \; . \tag{4.4.5}$$

Il metodo di Cramer

1. Si stabilisce se il sistema lineare è del tipo (4.4.1) verificando che il determinante della matrice dei coefficienti sia non nullo
$$\det A \neq 0 \; . \tag{4.4.7}$$
2. Per ogni $i=1,\dots,n$, si costruisce la matrice quadrata $A_i \in \mathfrak{M}(n)$ ottenuta sostituendo nella matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(n)$ la colonna i-esima con il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ $(\equiv \mathfrak{M}(n,1))$
$$A_i := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{4.4.8}$$
3. La soluzione del sistema lineare considerato è data dal vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, le cui componenti sono determinate come segue
$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \; , \qquad \forall\, i=1,\dots,n \; . \tag{4.4.9}$$

Un esempio

Esempio 4.4.1. Si consideri il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \tag{4.4.10}$$
In forma matriciale questo sistema lineare può essere riscritto come
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \, , \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} . \tag{4.4.11}$$
Si calcola il determinante della matrice dei coefficienti e si trova che
$$\det A = 1 \neq 0 \; , \tag{4.4.12}$$
perciò, per il Corollario 4.4.1, il sistema è determinato e si può determinare la (unica) soluzione per mezzo di uno dei metodi introdotti precedentemente.

Metodo di Gauss.

1. Si considera la *matrice associata* al sistema $(A\,|\,\mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(3,4)$ ottenuta accostando il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathfrak{M}(3,0)$ $(\equiv \mathbb{R}^3)$ alla matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(3,3)$
$$(A\,|\,\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) . \tag{4.4.13}$$

2. Si considera la sequenza di operazioni seguente.
   i. Si scambiano la prima e la seconda riga.
   ii. Si somma la prima riga alla seconda e alla terza riga.
   iii. Si scambiano la seconda e la terza riga.
   iv. Si somma la seconda riga moltiplicata per -3 alla terza riga.
   v. Si somma la terza riga moltiplicata per -1 alla seconda riga.
   vi. Si sommano la terza riga moltiplicata per 2 e la seconda riga alla prima riga.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{i}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{ii}{\to}
$$
$$
\overset{ii}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{iii}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{iv}{\to}
$$
$$
\overset{iv}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{v}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{vi}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) . \tag{4.4.14}
$$

3. La soluzione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ definito come

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{4.4.15}
$$

Metodo della matrice inversa.

1. Si è già verificato (si veda l'Eq.(4.4.12)) che la matrice dei coefficienti è invertibile.
2. Si determina la matrice inversa $A^{-1} \in GL(3)$ con il metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa, procedendo con i seguenti passaggi.
   i. Si scambiano la prima e la seconda riga.
   ii. Si somma la prima riga alla seconda e alla terza riga.
   iii. Si scambiano la seconda e la terza riga.
   iv. Si somma la seconda riga moltiplicata per -3 alla terza riga.
   v. Si somma la terza riga moltiplicata per -1 alla seconda riga.
   vi. Si sommano la terza riga moltiplicata per 2 e la seconda riga alla prima riga.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{i}
$$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{i} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{ii} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{iii} \\
&\xrightarrow{iii} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{v} \\
&\xrightarrow{v} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{vi} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) .
\end{aligned}
\tag{4.4.16}
$$

Perciò l'inversa della matrice dei coefficienti è

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} . \tag{4.4.17}
$$

2. La soluzione è ottenuta moltiplicando a sinistra il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ($\equiv \mathfrak{M}(3,1)$) per la matrice inversa $A^{-1} \in GL(3)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{4.4.18}
$$

Metodo di Cramer.

1. Si è già verificato (si veda l'Eq.(4.4.12)) che la matrice dei coefficienti è invertibile.

2. Per ogni $i=1,2,3$, si costruisce la matrice quadrata $A_i \in \mathfrak{M}(3)$ ottenuta sostituendo nella matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(3)$ la colonna i-esima con il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Si hanno così le matrici

$$
A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tag{4.4.19}
$$

i cui rispettivi determinanti sono

$$
\det A_1 = -2 , \qquad \det A_2 = 2 , \qquad \det A_3 = -1 . \tag{4.4.20}
$$

3. La soluzione del sistema lineare considerato è data dal vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, le cui componenti sono determinate come segue

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-2}{1} = -2 \ , \tag{4.4.21}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{2}{1} = 2 \ , \tag{4.4.22}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{1}{1} = -1 \ . \tag{4.4.23}$$

Perciò la soluzione è

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ . \tag{4.4.24}$$

Bibliografia

[1] A. Guerraggio, *Matematica Generale* (Bollati Boringhieri, 1995).

[2] S. Lang, *Algebra Lineare* (Bollati Boringhieri, 2003).

[3] *http://en.wikibooks.org/wiki/Linear_ Algebra* .

[4] Sito didattico *Matematica Assistita*. E' accessibile (con le credenziali usuali della posta elettronica) all'indirizzo

`http://ariel.unimi.it/User/Default.aspx`

Si vedano, in particolare, gli Argomenti 11, 12 e 13.