Università degli Studi di Milano
Corso di Laurea in Informatica Musicale

Programma d'esame del corso di MATEMATICA del CONTINUO a.a. 2016/17

Docenti: S. De Stefano – P. Mastrolia

Campi numerici.

Il campo razionale come ampliamento dell'insieme dei numeri interi relativi: proprietà e problemi.
Il campo dei numeri reali: rappresentazione geometrica e rappresentazione mediante allineamenti decimali; proprietà algebriche; ordinamento e sue proprietà, in particolare, proprietà di completezza. Concetto di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme ordinato; esistenza dell'estremo superiore (rispettivamente: inferiore) di ogni insieme superiormente (rispettivamente: inferiormente) limitato di numeri reali. Nozione di intervallo sulla retta reale (aperto, chiuso, limitato o non) e di intorno di un punto.
Il campo complesso: rappresentazione algebrica (parte reale e immaginaria), geometrica (modulo e argomento), trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi. Radici *n*-esime. Teorema fondamentale dell'algebra.

Algebra lineare.

Vettori. Rappresentazione geometrica dei vettori; vettori applicati in un punto; operazioni fra vettori, combinazioni lineari, base standard; rappresentazione dei vettori come *n*-uple: traduzione algebrica delle operazioni. Prodotto scalare di 2 vettori: sue proprietà algebriche e interpretazioni geometriche (proiezioni ortogonali e più in generale angoli tra due vettori). Ortogonalità tra vettori. Prodotto vettoriale di due vettori dello spazio 3-dimensionale: interpretazione geometrica (area); prodotto misto di tre vettori dello spazio 3-dimensionale: interpretazione geometrica (volume).
Geometria analitica. Equazioni (parametriche e non) di rette e piani nello spazio. Distanza tra due punti, tra un punto e un piano.
Matrici, loro algebra e loro legami con le applicazioni lineari; matrici quadrate: inverse, determinanti.
Sistemi lineari. Rango di una matrice. Teorema di risolubilità (Rouchè – Capelli), metodi di risoluzione per sistemi quadrati a soluzione unica (metodo di Cramer) e non (metodo di Gauss).

Funzioni

Generalità. Concetto di funzione tra due insiemi (in particolare di numeri reali); variabili indipendenti e dipendenti; dominio, codominio e immagine di una funzione; composizione di funzioni; funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzioni invertibili.
Funzioni reali di variabile reale. Grafico; nozioni di: funzione limitata, di massimo (minimo) assoluto o relativo per una funzione, funzione monotona, funzione convessa (concava). Operazioni aritmetiche sulle funzioni. Parità; periodicità.
Funzioni elementari. Funzioni lineari; funzioni (aventi per grafico) rette, parabole, iperboli; funzioni potenza, in particolare radicali; funzione esponenziale e sua inversa; funzioni

trigonometriche e loro inverse; funzioni iperboliche. Grafico delle funzioni elementari e di funzioni da esse ottenute sostituendo la variabile indipendente (o dipendente) t con $t + a$ o con at.

Successioni numeriche

Carattere di una successione (con esempi). Definizione di limite per una successione; teorema di unicità del limite di una successione convergente o divergente. Carattere delle successioni monotone. Teorema della permanenza del segno.
Criteri di convergenza per le successioni di numeri reali: criterio del confronto con una coppia di successioni; criterio (necessario) della limitatezza delle successioni convergenti.
Calcolo de1 limite di una successione: chiusura rispetto a somma, sottrazione e prodotto dell'insieme delle successioni convergenti; problemi posti dalle reciproche di successioni convergenti a zero e dalle successioni divergenti: forme di indecisione [∞–∞], [0·∞], [0/0], [∞/∞].
Limiti: della successione $\{a^n\}$ per n che tende a +∞; delle successioni $\{\sin a_n\}$, $\{\cos a_n\}$, $\left\{\frac{\sin a_n}{a_n}\right\}$ per $\{a_n\}$ che tende a 0; delle successioni $\{\log_c a_n\}$ e $\left\{{a_n}^{b_n}\right\}$: forme di indecisione $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ e corrispondenti per i logaritmi; limite della successione $\left\{(1+1/n)^n\right\}$ per n che tende a +∞ e limiti notevoli da esso derivati.
Asintoticità: suo uso nel calcolo dei limiti; infinitesimi (infiniti): loro confronto; ordine di infinitesimo (infinito); concetto di o( ). Criterio del rapporto. Confronto degli infiniti $\{\log n\}$, $\{n^k\}$, $\{e^n\}$, $\{n!\}$, $\{n^n\}$ e loro derivati mediante la sostituzione (quando sensato) di n con una successione $\{a_n\}$ divergente a +∞.

Limiti di funzioni

Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende ad A (finito o non) *tramite le successioni numeriche* tendenti ad A; limiti dalla sinistra e dalla destra. Proprietà derivanti da quelle dei limiti di successioni (unicità, criterio del confronto, teorema della permanenza del segno, esistenza del limite per le funzioni monotone, limite della somma di due funzioni ecc.). Concetto di asintotico, infinitesimo, infinito, o( ) per x che tende ad A (finito o non). Asintoti verticali, orizzontali o obliqui.

Funzioni continue

Continuità in un punto e su un intervallo; tipi di discontinuità con esempi. *Teoremi per funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato*: di esistenza degli zeri, di esistenza dei valori intermedi; teoremi di limitatezza e di esistenza degli estremi assoluti. Esempi e controesempi. Cenni sulla determinazione degli zeri (di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato) mediante il *metodo di bisezione.*

Elementi di calcolo differenziale

Tasso di incremento di una funzione reale di variabile reale (problemi fisici e geometrici): *derivata;* significato geometrico; punti angolosi e cuspidi. Derivate successive. Approssimazione lineare di una funzione derivabile nell'intorno di un punto: conseguenti connessioni della derivabilità con la continuità e con la differenziabilità.

Regole di derivazione: delle funzioni composte, della somma, del prodotto, del reciproco; derivabilità dell'eventuale inversa di una funzione derivabile, con significato geometrico.
Calcolo delle derivate delle funzioni elementari.

Applicazioni del calcolo differenziale

Teorema di annullamento della derivata prima in un punto di massimo (o minimo) relativo; teorema del valor medio (Rolle – Lagrange). Applicazioni: due primitive di una data funzione differiscono tra loro per una costante; studio degli *intervalli di monotonia* di una funzione e ricerca dei punti estremanti; criterio sufficiente di convessità e caratterizzazione delle funzioni derivabili convesse; ricerca dei punti di flesso. Studio di funzioni.
Teorema di *approssimazione polinomiale* (di Taylor) con il resto nella forma di Lagrange e di Peano. Polinomi di MacLaurin di alcune funzioni elementari. Uso dei polinomi di Taylor nel calcolo di limiti, nel calcolo approssimato del valore assunto da una funzione in un punto; cenni all'uso per ottenere un criterio generale per la determinazione dei punti estremanti e dei punti di flesso di una funzione più volte derivabile.

Calcolo integrale

Integrali indefiniti, loro proprietà, calcolo di integrali immediati. Metodi di integrazione (indefinita): per scomposizione, per sostituzione, per parti. Cenni all'integrazione delle funzioni razionali fratte.
Somme di Cauchy-Riemann associate ad una partizione di un intervallo chiuso e limitato, relative ad una funzione continua; *integrale definito (di Cauchy-Riemann).* Suo significato geometrico. Proprietà degli integrali definiti.
Determinazione delle aree di regioni piane limitate.
Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo; conseguenze sul calcolo dell'integrale definito di una funzione continua.
Integrali generalizzati. Limiti negli estremi del dominio di una funzione integrale: *integrali impropri di prima e di seconda specie*. Esempi fondamentali (funzione integranda della forma x^{-r} oppure $(x-a)^{-r}$ con *r* reale positivo). Criteri sufficienti per la convergenza dell'integrale improprio di funzioni di segno costante (del confronto, del confronto asintotico).

MODALITÀ DELL'ESAME ORALE

La prova orale è composta da uno o più dei seguenti momenti (non necessariamente in quest'ordine o con questa marcata suddivisione):

- svolgimento di semplici esercizi su argomenti in cui la prova scritta ha evidenziato lacune o difficoltà (con accertamento dei requisiti minimi). Tra questi esercizi rientrano anche il tracciamento di grafici di funzioni elementari e il calcolo esplicito
  a) di alcuni limiti fondamentali
  b) delle derivate elementari
  c) di alcuni integrali indefiniti
  d) di integrali impropri standard

- risposta a domande circostanziate formulate dal docente su alcuni argomenti di teoria: si richiede che il candidato
  a) abbia chiare le loro applicazioni (quindi: i problemi da cui nascono),
  b) conosca le definizioni necessarie a spiegare gli enunciati dei teoremi che in essi si trovano,
  c) conosca gli enunciati stessi con gli esempi e i controesempi corrispondenti.
- esposizione di un argomento a scelta del candidato: definizioni, esempi, enunciati (con la dimostrazione di almeno un teorema) e loro conseguenze pratiche... Per questo il candidato è invitato a segnalare all'inizio dell'esame tre teoremi "di suo gradimento" tra quelli sotto elencati, scelti ciascuno in una differente parte del programma, tra quelli in *corsivo* (ciascuno con le conseguenze indicate).

Parte I

Numeri complessi

- Calcolo delle *radici n*-esime di un numero complesso

Successioni numeriche

- *Unicità del limite.*
- *Permanenza del segno.*
- *Convergenza della successione* $\left\{(1+1/n)^n\right\}$ *per n che tende a* ∞.

  Limiti delle successioni $\left\{(1+ta_n)^{1/a_n}\right\}, \left\{\frac{\log_c(1+a_n)}{a_n}\right\}, \left\{\frac{c^{a_n}-1}{a_n}\right\}, \left\{\frac{(1+a_n)^t-1}{a_n}\right\}$ per $\{a_n\} \to 0$.

Funzioni continue

- *Teorema degli zeri e corollario dei valori intermedi.*

Parte II

Funzioni derivabili

- *Continuità delle funzioni derivabili.*

Calcolo differenziale

- *Annullamento della derivata* negli estremi relativi di una funzione derivabile (teorema di Fermat).
- *Teoremi di Rolle, Lagrange* e loro *conseguenze*:
  a) individuazione della classe delle funzioni la cui derivata si annulla su un intervallo;
  b) individuazione della classe delle primitive di una funzione assegnata;
  c) monotonia delle funzioni la cui derivata ha segno costante su un intervallo; individuazione di estremi relativi.

Parte III

Calcolo integrale

- *Teorema del valor medio*
- *Teorema fondamentale del calcolo* e sue conseguenze.