

Svolgimento del Fac-simile 1 (Met. del Contenuto per Inf. Municipale)

1. Le altre due radici terziedi si ottengono facendo "ruotare" di $\frac{2\pi}{3}$ e di $-\frac{2\pi}{3}$ la radice reale $z = 9 - 12i$ cioè moltiplicando per le due radici terziedi che non sono reali.

$$z_2 = z \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (9 - 12i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \left(-\frac{9}{2} + 6\sqrt{3}i \right) + i \left(6 + \frac{9\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_3 = z \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = (9 - 12i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \left(-\frac{9}{2} - 6\sqrt{3}i \right) + i \left(6 - \frac{9\sqrt{3}}{2} \right)$$

(Il motivo è che z, z_2, z_3 devono essere ai vertici di un triangolo equilatero con banchetto nell'origine del piano di Argand-Gauss).

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x^2) + x \arctan 2x}{x^2 \left(\sqrt[3]{(1-x)^2} - 1 + \frac{2}{3}x \right)}$ presenta una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0} \right]$
 poiché per $x \rightarrow 0$: $\ln(1-2x^2) \rightarrow 0$
 $x \arctan 2x \rightarrow 0$
 $2x^2 \rightarrow 0$
 $(1-x)^{2/3} - 1 + \frac{2}{3}x \rightarrow 0$

Visto che tanto al numeratore che al denominatore sono coinvolte somme di funzioni gli asintotici non bastano. Usiamo quindi le formule di MacLaurin (infatti $x \rightarrow 0$!):

$$\text{al denominatore: } (1-x)^{2/3} - 1 + \frac{2}{3}x = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{2}{3}x = -\frac{x^2}{9} + o(x^2)$$

$$\text{quindi il denominatore si può approssimare con } -\frac{x^2}{9} \cdot x^2 + x^2 o(x^2) = -\frac{x^4}{9} + o(x^4)$$

$$\text{al numeratore: } \ln(1-2x^2) = (-2x^2) - \frac{(-2x^2)^2}{2} + o(x^4) = -2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

$$\arctan 2x = (2x) - \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = 2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \text{ e quindi}$$

$$x \arctan 2x = 2x^2 - \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$$

quindi il numeratore si può approssimare con

$$-2x^2 - 2x^4 + o(x^4) + 2x^2 - \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{14}{3}x^4 + o(x^4)$$

Dunque il limite diventa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{14}{3}x^4}{-\frac{1}{9}x^4} = 56$

3. La funzione $f(x) = \arctan \sqrt{4-x^2}$

a) è definita purché $4-x^2 \leq 0$, cioè in $[-2, 2]$

si annulla per $\sqrt{4-x^2} = 0$ cioè in $x=2$ e $x=-2$

altrove è sempre positiva poiché $\sqrt{4-x^2} > 0$ e se $t > 0$ allora $\arctan t > 0$,

$$b) f'(x) = \frac{1}{1+(4-x^2)} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{(5-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

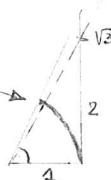
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{1\sqrt{4}(2-x)} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2}{1\sqrt{4}(2+x)} = +\infty$$

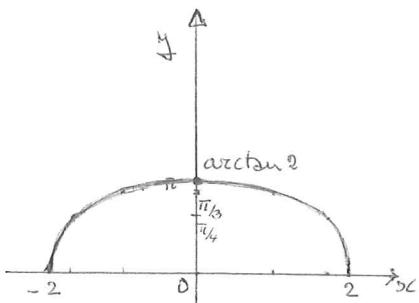
questo dice che in $(2, 0)$ e in $(-2, 0)$ le tangenti al grafico sono parallele all'asse y .

$$c) f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2, 2) \\ -x \geq 0 \end{cases} \quad \text{quindi } f'(x) > 0 \text{ e } f(x) \text{ cresce in } (-2, 0) \\ f'(x) < 0 \text{ e } f(x) \text{ decresce in } (0, 2)$$

In $x=0$ c'è un massimo relativo (assoluto): $f(0) = \arctan 2$

(In figura: $\arctan 2$ confrontato con $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$)





per il tracciamento del grafico osserviamo che

1°) la funzione è pari e quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

$$f(1) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

e, come già detto, $f(0) = \arctan 2$ (MAX)

e $f(-2) = f(2) = 0$ (min. assoluti, non relativi!) con tangente verticale.

Facoltativo: avendo fatto bene la figura ammiamo che f in $(-2, 2)$ sia concava! (è un sistema di controllo sui conti!)

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(5-x^2)\sqrt{4-x^2} - x(-2x\sqrt{4-x^2} + (5-x^2)\cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}})}{(5-x^2)^2(4-x^2)} = -\frac{(5-x^2)(4-x^2) + 2x^2(4-x^2) + x^2(5-x^2)}{(5-x^2)^2(4-x^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{2x^4 + 4x^2 + 20}{(5-x^2)^2(4-x^2)^{3/2}} = 2 \cdot \frac{x^4 - 2x^2 - 10}{(5-x^2)^2(4-x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

In $(-2, 2)$ il denominatore è sempre > 0 .

Il numeratore si scomponere come $(x^2 - 1 + \sqrt{11})(x^2 - 1 - \sqrt{11})$: il primo addendo è sempre > 0 (Somma di un numero positivo e di x^2); il secondo è certamente NEGATIVO per $x \in (-2, 2)$ poiché $x^2 - 1 - \sqrt{11} < 4 - 1 - \sqrt{11} = 3 - \sqrt{11} < 0$,

Sì conferme che la funzione è sempre concava!

4. La funzione $\frac{2}{1-(\tan x)^2} - 1$ è definita purché $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ (\tan x)^2 \neq 1, \text{ cioè } x \neq \pm \frac{\pi}{4} + h\pi, h \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

$$\text{cioè l'I.D. è } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right].$$

La funzione è continua su ciascuno dei singoli intervalli aperti:

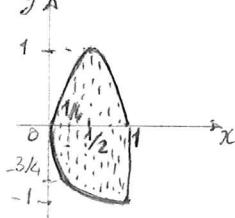
$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}; \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}; \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z},$$

e ciascuno di questi è un intervallo massimale di definizione delle primitive di $f(x) = \frac{2}{1-(\tan x)^2} - 1 = \frac{1+(\tan x)^2}{1-(\tan x)^2}$.

Ricordando che se $t = (\tan x)^2$ allora $dt = (1 + (\tan x)^2) dx$ si capisce che le primitive possono essere calcolate per sostituzione

$$\int \frac{1+(\tan x)^2}{1-(\tan x)^2} dx = \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \left(\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \right) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right| + C,$$

5. La funzione definita su $[0, 1]$ da $f(x) = \sin \pi x$ ha per grafico un arco di sinusoida con massimo in $x = \frac{1}{2}$ e minimo in $x = 0$ e $x = 1$. I valori della funzione sono > 0



Invece $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ nell'intervallo $[0, 1]$ è sempre negativa

(si ammette in $x=0$: tenere presente che in $(0, 1)$ si ha $\sqrt{x} > x$) e la funzione è monotona decrescente poiché $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$ in $(0, 1)$; minimo assoluto = -1.

Quindi in $(0, 1)$ si ha $f(x) > g(x)$ e l'unico punto di intersezione dei grafici è $(0, 0)$. Dunque la regione R è quella triangolare

$$\begin{aligned} \text{quieta e } R &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (\sin \pi x - x + 2\sqrt{x}) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{\pi} + 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

6. Il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w = k \\ x - z + 4w = k-1 \\ y - 5z + 9w = 0 \end{cases}$$

ha matrice associata completa $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & k \\ 1 & 0 & -1 & 4 & k-1 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right)$

L'esercizio può essere svolto in due modi:

1° metodo operativo. Utilizzo il metodo di Gauß-Jordan per cercare di risolvere il sistema e vedo quando ciò è possibile

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & k \\ 1 & 0 & -1 & 4 & k-1 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Scambio R1-R2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & k-1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & k \\ 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R2} - 2\cdot\text{R1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & k-1 \\ 0 & -1 & 5 & -9 & 2-k \\ 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R3} + \text{R2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & k-1 \\ 0 & -1 & 5 & -9 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array} \right)$$

L'ultima equazione: $0x + 0y + 0z + 0w = k-2$ è impossibile (e purtroppo è impossibile anche il sistema) se $k-2 \neq 0$.

Se $k=2$ l'ultima equazione è un'identità e quindi ci si riconduca a un sistema di 2 equazioni in 4 incognite con rango (e determinante) delle matrice dei coefficienti = 2 poiché le due righe

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -9 \end{array} \right)$$

Sono palesemente indipendenti. Quindi le soluzioni dipendono da $4-2=2$ parametri. Posso anche ricavarle ($k=2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-1)+z-4w \\ (k-2)+5z-9w \\ z \\ w \end{pmatrix} \\ z, w \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2° metodo teorico. Determiniamo il rango di A e di $(A|b)$: se sono uguali, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è risolvibile e le soluzioni dipendono da $4-\text{rg}(A)$ parametri.

Il $\text{rg } A$ si può determinare ancora con un metodo alle Gauß oppure osservando che $\text{rg } A \geq 2$ poiché contiene la sotto matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha determinante 1 ($\neq 0$). Ora basta questa matrice con le restanti due colonne (e l'ultima riga) si ha:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & k \\ 1 & 0 & -1 & k-1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right| = -1 \cdot \left| \begin{array}{cc} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{array} \right| + 1 \cdot \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = -5 + 3 + 2 + 0 = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & k \\ 1 & 0 & 4 & k-1 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array} \right| = 1 \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{array} \right| - 1 \cdot \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{array} \right| = 9 - 0 - 8 - 1 = 0$$

quindi (formula di Dedekind)
non esistono in A sottomatrici
quadrati di ordine 3 con determi-
nante $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{rg } A = 2.$$

Perché il sistema sia risolvibile anche il determinante delle matrice ottenuta orendo con le colonne dei termini noti deve valere zero: $\left| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & k \\ 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = 1 \cdot \left| \begin{array}{cc} 2 & k \\ 1 & k-1 \end{array} \right| = -(2k-2-k) = 0$
cioè deve essere $k=2$.