

## Svolgimento del Fac-simile 4 (Matematica del Continuo per Inf. Municipale)

1. L'equazione a coefficienti complessi  $2i|z|=1$  non ha soluzioni poiché non esiste alcun numero reale  $\geq 0$  ( $|z|$ ) che moltiplicato per un immagine  $i$  può forse dare un numero reale  $\neq 0$  ( $i$ ).

L'eq. a coeff complessi  $2i|z|=z^2$  ha sicuramente tra le sue soluzioni  $z=0$ . Se  $z \neq 0$  rappresenta il numero in forma trigonometrica:

$$z = p(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{con} \quad p = |z| \neq 0$$

Si ha quindi  $2ip = p^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$  cioè

$$2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = p(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

Quest'uguaglianza è possibile se e solo se  $\begin{cases} p=2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

e i valori trovati per  $\theta$  danno luogo a 2 sole sol. distinte (corrispondenti a  $k=-1$  e  $k=0$ ):

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

In totale quindi l'equazione ha 3 soluzioni:  $0$  e  $\pm (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1-e^x + \ln(1+x)}{x^3} + \frac{1}{x} \right)$  scritto in questo modo presenta una F.I.  $[0-0]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x + \ln(1+x) + x^2}{x^3} \quad \text{presenta una F.I. } \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Mettiamo le formule di MacLaurin per approssimare il numeratore: essendo presente un  $x^2$  converrà arrivare almeno al 3° ordine:

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^3) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - e^x + \ln(1+x) + x^2 = 1 - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 + O(x^3) = \frac{x^3}{6} + O(x^3)$$

Quindi il limite diventa:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/6}{x^3} = \frac{1}{6}$ .

3. La funzione  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a) è definita in  $(0, +\infty)$ , condizione di esistenza tanto di  $\ln x$  che di  $x^{-1/2}$ ,

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f(x) &> 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \quad \text{in } x=1 \\ f(x) < 0 \quad \text{in } (0, 1) \\ f(x) > 0 \quad \text{in } (1, +\infty) \end{cases}$$

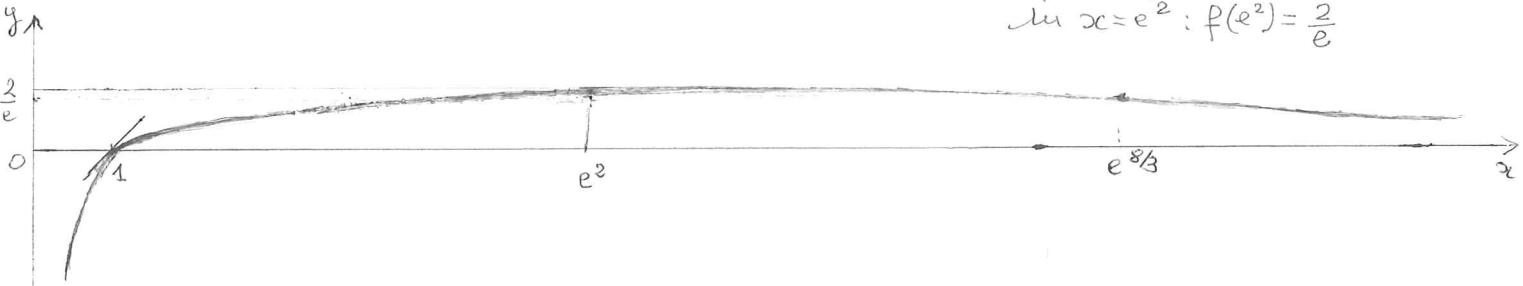
b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ : asintoto verticale  $x=0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (confronto di infiniti): asintoto orizzontale  $y=0$ .

$$c) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

$$d) f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ 2 - \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq e^2 : \text{quindi } f(x) \text{ cresce in } (0, e^2) \text{ e decresce in } (e^2, +\infty) \text{ ha un p.t. di massrel. (assoluto) in } x=e^2 : f(e^2) = \frac{2}{e}$$



Per tracciare il grafico può essere opportuno osservare che  $f'(1)=1$  e quindi la tangente in  $(1,0)$  al grafico è parallela alle bisettrici del  $1^{\circ}$  e  $3^{\circ}$  quadrante. È poi ovvio che un flesso ci deve essere (in  $e^2$  ho max  $\rightarrow$  in un intorno  $f(x)$  è concava; invece per  $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \rightarrow 0^+$ : bisogna che cambi concavità).

Determiniamolo:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^{3/2} - \frac{3}{2} x^{1/2} (2 - \ln x)}{2x^3} = \frac{-2 - 6 + 3 \ln x}{4x^{5/2}} > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{8}{3} \Leftrightarrow x > e^{8/3}$$

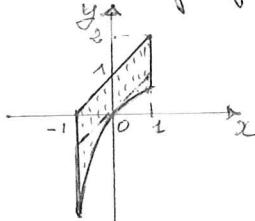
Dunque  $f(x)$  è concava in  $(0, e^{8/3})$ , convessa in  $(e^{8/3}, +\infty)$  e ha un punto di flesso in  $e^{8/3} \approx 14,39$ , con  $f(e^{8/3}) = \frac{8}{3e^{4/3}} \approx 0,70$

4.  $\frac{\sin x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{1 + (\cos x)^2}$  è funzione definita e continua su tutto  $\mathbb{R}$  quindi l'intervallo massimale di definizione delle primitive è dato da  $\mathbb{R}$ .

È noto che  $(\cos x)' = -\sin x$ . Quindi posto  $\cos x = t$  e  $-\sin x dx = dt$ :

$$\int \frac{\sin x}{1 + (\cos x)^2} dx = - \int \frac{dt}{1 + t^2} = -\arctant + c = -\arctan(\cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. Nell'intervallo  $[-1, 1]$  la funzione  $g(x) = 1+x$  ha per grafico un segmento di retta di estremi  $(-1, 0)$  e  $(1, 2)$ . La funzione  $f(x) = xe^{-x}$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  è monotona crescente poiché  $f'(x) = e^{-x}(1-x) \geq 0$  (si annulla in  $x=1$ ) e  $f(-1) = -e$ ,  $f(1) = e^{-1}$ ; inoltre  $f(x)$  in  $[-1, 1]$  è concava poiché  $f''(x) = e^{-x}(x-2) < 0$  in tale intervallo. Dunque il grafico giace tutto sotto la retta tangente in  $(0,0)$  al grafico, che ha eq.  $y=x$  e quindi è parallela al grafico di  $g(x)$ . Ciò basta a garantire che tra il grafico di  $f(x)$  e quello di  $g(x)$  non ci sono intersezioni.



Quindi la regione  $R$  è quella rappresentata e la sua area è

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^1 (1+x - xe^{-x}) dx = \left[ x + \frac{x^2}{2} + e^{-x}(x+1) \right]_{-1}^1 = 1 + \frac{1}{2} + 2e + 1 - \frac{1}{2} + 0 = 2(1+e)$$

$$\boxed{\int -xe^{-x} dx = e^{-x} \cdot x - \int e^{-x} dx = e^{-x}(x+1) + C}$$

b. Dice che  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartiene all'immagine di  $f_{kx}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ k & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  significa che esiste  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tale che  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ k & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

cioè che il sistema lineare  $\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ kx + 4y = 0 \end{cases}$  è risolubile.

#### 1° Metodo

Sommando 2 volte la 1<sup>a</sup> equazione alla 3<sup>a</sup> si ha il sistema equivalente

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ (k-2)x = 0 \end{cases} \quad \text{e visto che le prime due equazioni danno } \begin{cases} x = -2y \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 \neq 0$$

perché anche l'ultima equazione possa essere risolubile per  $x=2$  bisogna che sia  $k-2=0$   
cioè  $k=2$ .

Alternativamente: il rango della matrice dei coefficienti (che è una  $3 \times 2$ ) è 2 per ogni valore di  $k$ , poiché contiene la sottomatrice  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  che ha determinante  $-4+2 \neq 0$ .

Il sistema sarà risolubile (Rouché-Capelli) se e solo se  $\text{rg}(A|b)=2$

Cioè  $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ k & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2k = 0 \quad \text{e quindi } k=2.$