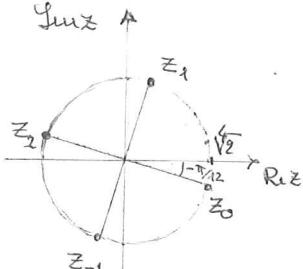


Svolgimento del Fac-simile 5 (Matematica del Continuo per l'Ingegneria)

1. Il numero complesso $w = 1 - \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Quindi le sue radici quarte hanno modulo $\sqrt[4]{2}$ e argomenti

$$\theta_{-1} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}, \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{12}, \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11}{12}\pi.$$

Questa è la rappresentazione nel piano di Argand-Gauss:



notare che $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$ quindi

$$\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Quindi } z_0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt[4]{2^7}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt[4]{2^7}} i = -z_2 \quad ; \quad z_1 = z_0 \text{ cioè:}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt[4]{2^7}} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt[4]{2^7}} i = -z_{-1}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + 2 \cos x - 2}{(\sin x)^3}$ presenta una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$

al denominatore è presente solo una potenza (senza scenne algebriche)
 quindi basta approssimare con l'asintotico: per $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$ e quindi $(\sin x)^3 \sim x^3$.
 Al numeratore sono presenti scenne, quindi conviene approssimare con le
 formule di MacLaurin; per $x \rightarrow 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \Rightarrow 2 \cos x - 2 = -x^2 + \frac{x^4}{72} + o(x^4)$$

Sommando:

$$x \ln(1+x) + 2 \cos x - 2 = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^4}{72} + o(x^4) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \quad \text{perché } x^4 = o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Dunque il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/2}{x^3} = -\frac{1}{2},$$

3. La funzione $f(x) = \ln\left(\frac{10-4x}{1-x}\right) + 3x$

a) è definita per $\frac{10-4x}{1-x} > 0$ cioè in $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln\left(\frac{6}{1-x}\right) + 3 \right) = +\infty : \text{asintoto verticale di eq. } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \left(\ln\left(\frac{4}{3}(2x-5)\right) + \frac{15}{2} \right) = -\infty : \text{asintoto verticale di eq. } x=\frac{5}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\ln 4 + 3x) = \pm\infty$ e in entrambi i casi si vede che l'asintoto obbligo
 che equazione $y = 3x + \ln 4$.

$$b) f'(x) = \frac{x-1}{4x-10} \cdot 2 \cdot \frac{2(x-1)-(2x-5)}{(x-1)^2} + 3 = \frac{3}{(2x-5)(x-1)} + 3 = \frac{3(2x^2-7x+6)}{(2x-5)(x-1)} \geq 0 \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty) \\ 2x^2-7x+6 \geq 0 \end{cases}$$

Le radici dell'eq. di 2° grado sono $x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$: entrambe sono esterne all'I.A.

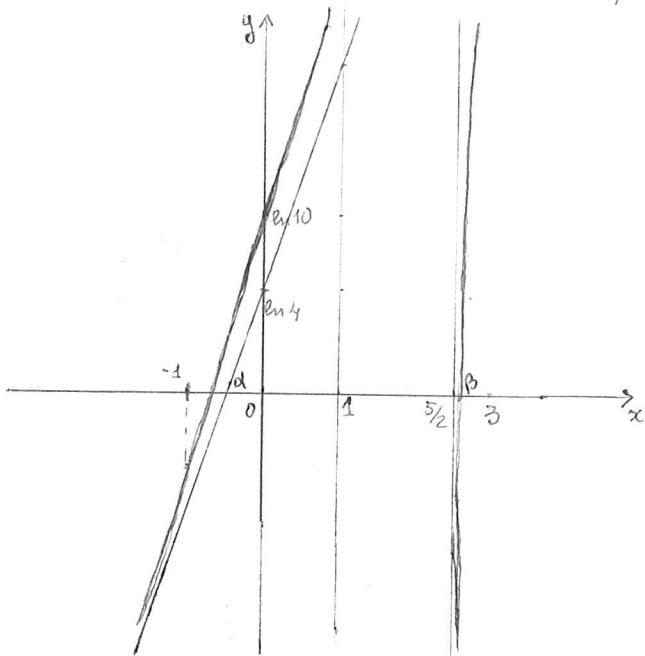
Quindi nell'I.A. $f'(x) > 0$ sempl. Quindi

$f(x)$ è crescente in $(-\infty, 1)$ e in $(-\frac{5}{2}, +\infty)$ (singoli intervalli!).

c) Poiché $f(0) = \ln 10$ e $f'(0) = \frac{18}{5}$, l'eq. della retta tangente in $(0, \ln 10)$ al grafico è
 $y - \ln 10 = \frac{18}{5}x$

d) $f''(x) = \left(3\left(\frac{1}{(2x-5)(x-1)} + 1\right)\right)' = -3 \cdot \frac{4x-4}{(2x-5)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \cup (5/2, +\infty) \\ x \leq 7/4 \end{cases}$

Poiché $1 < 7/4 < 5/2$, si vede che la funzione è convessa in $(-\infty, 1)$, concava in $(5/2, +\infty)$.



Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $f(0) = \ln 10 > 0$

e poiché la funzione è continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato di $(-\infty, 0]$, sicuramente esiste uno zero in $(-\infty, 0]$ e l'unico poiché la funzione è monotona.

Osservo che $f(-1) = \ln\left(\frac{15}{2}\right) - 3 < 0$

Quindi il primo zero cade nell'intervallo $(-1, 0)$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 5/2^+} f(x) = -\infty$ e $f(3) = \ln 1 + 9 = 9 > 0$

e poiché f è continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato di $(5/2, 3]$ il secondo zero cade in questo intervallo, (anche unico poiché $f(x)$ è monotona)

Indicati i due zeri con α e β come nel grafico, per le monotonia di $f(x)$ si ha $f(x) > 0$ in $(\alpha, 1)$ e in $(\beta, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-\infty, \alpha)$ e in $(\beta, 5/2)$.

4. La funzione $x \ln(x^2 - 1)$ è definita in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ed è continua in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$: sono, infatti, gli intervalli massimali di definizione delle primitive.

Quanto al calcolo dell'integrale indefinito, si osserva che posto $t = x^2 - 1$, $dt = 2x dx$. Quindi, per sostituzione

$$\int x \ln(x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \int \ln t dt = \frac{1}{2} (t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) (\ln(x^2 - 1) - 1) + C.$$

5. $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 49} dx$: nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione integranda è definita e continua

Per trovare una primitiva osservo che $\frac{1}{x^2 - 49} = \left(\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x+7}\right) \cdot \frac{1}{14}$. Quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 - 49} = \frac{1}{14} \int \left(\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x+7}\right) dx = \frac{1}{14} \ln \left| \frac{x-7}{x+7} \right| + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Quindi } \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 49} dx = \frac{1}{14} \left[\ln \left| \frac{x-7}{x+7} \right| \right]_0^1 = \frac{1}{14} \ln \frac{3}{4}.$$

6. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile poiché $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

(si è sfruttata la multilinearità del determinante: sommando una riga di A , d'ultima, a un'altra, la prima, il determinante non cambia).

Il metodo più semplice per il calcolo dell'inversa è risolvere il sistema $AX = I$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R4-R1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Scambi R2-R3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R4 \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$