

Funzioni di 2 variabili

1. Specificare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni e disegnarli nel piano:

$$\frac{x+y}{x-y}, \quad \sqrt{xy}, \quad \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{xy}{x^2-y^2}, \quad \sqrt{4x^2+9y^2-36},$$
$$\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}, \quad \ln(1+xy), \quad \frac{1}{\cos(x-y)}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2-x^3 y^3}{x^2+y^2}.$$

3. Spiegare perché i seguenti limiti non esistono

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}.$$

4. Determinare entrambe le derivate parziali prime delle seguenti funzioni, valutandole nei punti indicati:

$$xy+x^2 \text{ in } (2,0); \quad \ln(1+e^{xy}) \text{ in } (2,-1); \quad \sin(x\sqrt{y}) \text{ in } \left(\frac{\pi}{3}, 4\right).$$

5. Trovare le equazioni del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto indicato:

$$x^2-y^2 \text{ in } (-2,1); \quad \cos(x/y) \text{ in } (\pi,4); \quad ye^{-x^2} \text{ in } (0,1); \quad \sqrt{1+x^2 y^3} \text{ in } (1,2).$$

6. Scrivere il gradiente di ciascuna delle funzioni degli esercizi (4) e (5).

7. Determinare la velocità di variazione delle seguenti funzioni, nei punti e nelle direzioni assegnati:

$$3x-4y \text{ in } (0,2) \text{ nella direzione } -2\mathbf{i}; \quad x^2 y \text{ in } (-1,-1) \text{ nella direzione } \mathbf{i}+2\mathbf{j}.$$

8. Determinare tutte le derivate seconde delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{3x^2-xy+1}; \quad xe^y - ye^x; \quad \ln(1+2xy^2); \quad \arctg(x^2 y - y^2 + x); \quad x^2 \sin y - y \sin x^2.$$

9. Determinare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni:

$$xy e^{-(x^2+y^2)/2}; \quad x^2 y e^{-(x^2+y^2)}; \quad \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y; \quad x \sin y; \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$