Soluzioni degli esercizi sulle FUNZIONI DI DUE VARIABILI

1. **Insiemi di definizione**:

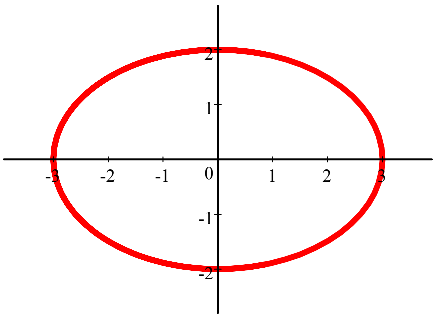
   (a) $\dfrac{x+y}{x-y}$ è definita se il denominatore è diverso da zero, cioè per $x \neq y$: graficamente significa rimuovere dal piano la retta $y = x$

   (b) $\sqrt{xy}$ è definita se $xy \geq 0$, cioè per $x \geq 0$ e $y \geq 0$ oppure $x \leq 0$ e $y \leq 0$: graficamente significa considerare il primo e il terzo quadrante, assi compresi

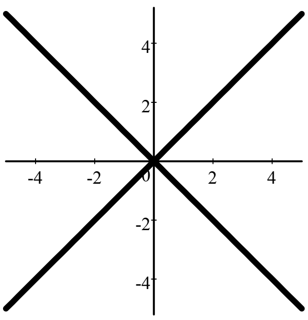
   (c) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ è definita se $x^2 + y^2 \neq 0$ cioè per $(x, y) \neq (0, 0)$: graficamente significa rimuovere dal piano l'origine

   (d) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ è definita se $x^2 - y^2 \neq 0$ cioè per $y \neq \pm x$: graficamente significa rimuovere dal piano le due rette $y = x$ e $y = -x$

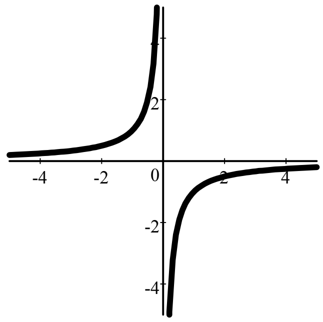
   (e) $\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$ è definita se $4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0$, cioè visto che $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ rappresenta un'ellisse che ha per asse maggiore l'asse x e asse minore l'asse y, se (x, y) non è contenuto all'interno dell'ellisse: graficamente vanno bene tutti i punti sull'ellisse oppure esterni ad essa



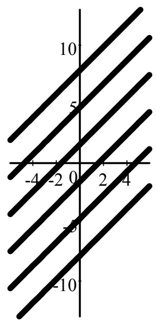
   (f) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ è definita se $x^2 - y^2 > 0$ cioè per $y^2 < x^2$ vale a dire per $-|x| < y < |x|$: graficamente significa rimuovere dal piano le due rette $y = x$ e $y = -x$ e i due quadranti che stanno al di sopra ed al di sotto di esse



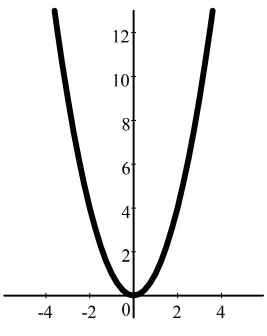
   (g) $\ln(1 + xy)$ è definita se $1 + xy > 0$ cioè $\begin{cases} \text{se } x > 0 \text{ per } y > -\dfrac{1}{x} \\ \text{se } x = 0 \text{ per ogni } y \\ \text{se } x < 0 \text{ per } y < -\dfrac{1}{x} \end{cases}$: graficamente significa che la funzione è definita sull'asse y e sui punti a sinistra di esso ma "sotto l'iperbole" di equazione $y = -\dfrac{1}{x}$ e a destra di esso ma "sopra" la stessa iperbole: complessivamente sono tutti i punti compresi tra i due rami dell'iperbole



(h) $\dfrac{1}{\cos(x-y)}$ è definita se $\cos(x-y) \neq 0$ cioè, osservando che $\cos(x-y) = \cos(y-x)$, per $y - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con k intero): graficamente significa rimuovere dal piano tutte le rette di equazione $y = x + \frac{\pi}{2} + k\pi$ (al variare di k nei numeri interi)



(i) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$ è definita se $x^2 - y > 0$ cioè per $y < x^2$: graficamente significa rimuovere dal piano tutti i punti della parabola di equazione $y = x^2$ e quelli nella regione al di sopra della parabola stessa.



2. **Calcolo di limiti**

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1 - x - \cos y} = \frac{\cos(1\cdot\pi)}{1 - 1 - \cos\pi} = \frac{\cos(\pi)}{-\cos\pi} = -1$: infatti la funzione è continua ove è definita (in quanto rapporto di composizione di funzioni continue e somme algebriche di funzioni continue con denominatore che non si annulla nel punto.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Per risolvere l'indecisione conviene passare a coordinate polari: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Quando $(x,y) \to (0,0)$ la distanza r del punto (x,y) da $(0,0)$ tende a zero e quindi il limite diventa:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 (\sin t)^3}{r^2} = \lim_{r\to 0} r (\sin t)^3 = 0,$$

poiché, per ogni valore di t, $\left|(\sin t)^3\right| < 1$ cioè $(\sin t)^3$ è una quantità limitata e quindi il suo prodotto per una quantità, r, che tende a zero risulta tendere a zero.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Per risolvere l'indecisione conviene passare a coordinate polari: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Quando $(x,y) \to (0,0)$ la distanza r del punto (x,y) da $(0,0)$ tende a zero e quindi il limite diventa:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4 (\cos t \cdot \sin t)^2}{r^2 \left[(\cos t)^2 + r^2 (\sin t)^4\right]} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 (\cos t \cdot \sin t)^2}{(\cos t)^2 + r^2 (\sin t)^2 (\sin t)^2} = 0.$$

Infatti r^2 tende a zero e la frazione $\dfrac{(\cos t \cdot \sin t)^2}{(\cos t)^2 + r^2 (\sin t)^2 (\sin t)^2}$ è limitata poiché vale zero se $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, mentre se $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dividendo numeratore e denominatore per $(\cos t)^2$ si vede che

$$0 \leq \frac{(\cos t \cdot \sin t)^2}{(\cos t)^2 + r^2 (\sin t)^2 (\sin t)^2} = \frac{(\sin t)^2}{1 + r^2 (\sin t)^2 (\tan t)^2} < \frac{(\sin t)^2}{1} < 1$$

Quindi moltiplicando tale frazione per r^2, che tende a zero, si ha una quantità che tende a zero.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Per risolvere l'indecisione conviene passare a coordinate polari: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Quando $(x,y) \to (0,0)$ la distanza r del punto (x,y) da $(0,0)$ tende a zero e quindi il limite diventa:

$$\lim_{r\to 0} 1 - \frac{r^6 (\cos t \cdot \sin t)^3}{r^2} = \lim_{r\to 0} 1 - \frac{r^4 (\sin 2t)^3}{8} = 1,$$

poiché, per ogni valore di t, $\left|(\sin 2t)^3\right| < 1$ cioè $(\sin 2t)^3$ è una quantità limitata e quindi il suo prodotto per una quantità, $\dfrac{r^4}{8}$, che tende a zero risulta tendere a zero.

3. **Discussione dell'esistenza di limiti**

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{y} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Passando a coordinate polari: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ si trova $\lim_{r\to 0} \dfrac{r^2}{r\sin t} = \lim_{r\to 0} \dfrac{r}{\sin t}$ che non permette di trarre conclusioni, poiché, al contrario che negli esercizi precedenti, la funzione coefficiente di r non è una funzione limitata.

D'altra parte avvicinandosi all'origine lungo parabole di equazione $y = ax^2$, cioè considerando che cosa succede operando questa sostituzione nella funzione $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y}$,

si vede che $f(x, ax^2) = \dfrac{x^2 + a^2x^4}{ax^2} = \dfrac{1}{a} + ax^2$ e quindi, avvicinandosi all'origine lungo parabole con diverso coefficiente a, la funzione tende ad assumere differenti valori $\dfrac{1}{a}$.
Ma il limite, se esiste, è unico: aver trovato più valori significa che il limite non esiste.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \left[\tfrac{0}{0}\right]$
Anche in questo caso il passaggio in coordinate polari non aiuta. Ma se ci si avvicina a $(0,0)$ lungo le rette di equazione $y = mx$, si vede che $f(x, mx) = \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2(1+m^2)}$ e poiché, per $x \to 0$, $\sin(mx^2)$ è asintotico a mx^2, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$ quindi, avvicinandosi all'origine lungo rette con diverso coefficiente angolare m, la funzione tende ad assumere differenti valori $\dfrac{m}{1+m^2}$.
Ma il limite, se esiste, è unico: aver trovato più valori significa che il limite non esiste.

4. **Derivate parziali prime e loro valutazione in punti particolari**

(a) $f(x, y) = xy + x^2$ ha derivata parziale
rispetto a x: $f_x(x, y) = y + 2x$ che in $(2, 0)$ vale $f_x(2, 0) = 4$
rispetto a y: $f_y(x, y) = x$ che in $(2, 0)$ vale $f_y(2, 0) = 2$

(b) $f(x, y) = \ln(1 + e^{xy})$ ha derivata parziale
rispetto a x: $f_x(x, y) = \dfrac{ye^{xy}}{1+e^{xy}}$ che in $(2, -1)$ vale $f_x(2, -1) = \dfrac{-e^{-2}}{1+e^{-2}}$
rispetto a y: $f_y(x, y) = \dfrac{xe^{xy}}{1+e^{xy}}$ che in $(2, -1)$ vale $f_y(2, -1) = \dfrac{2e^{-2}}{1+e^{-2}}$

(c) $f(x, y) = \sin\left(x\sqrt{y}\right)$ ha derivata parziale
rispetto a x: $f_x(x, y) = \sqrt{y}\cos\left(x\sqrt{y}\right)$ che in $\left(\frac{\pi}{3}, 4\right)$ vale $f_x\left(\frac{\pi}{3}, 4\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$
rispetto a y: $f_y(x, y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\cos\left(x\sqrt{y}\right)$ che in $\left(\frac{\pi}{3}, 4\right)$ vale $f_y\left(\frac{\pi}{3}, 4\right) = \dfrac{\pi}{12}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{24}$

5. **Equazione del piano tangente al grafico di una funzione di due variabili in un suo punto.**
Ricordiamo che se esistono e sono continue in (x_0, y_0) le derivate parziali prime della funzione $f(x, y)$, esiste il piano tangente ed ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ è una funzione continua e le sue derivate parziali prime sono continue in tutto il piano e quindi in particolare in $(-2, 1)$.
Risulta $f(-2, 1) = 4 - 1 = 3$, $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = -2y$ e quindi l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(-2, 1, 3)$ è $\quad z - 3 = -4\,(x + 2) - 2\,(y - 1)$.

(b) $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ è una funzione continua e le sue derivate parziali prime sono continue in ciascuno dei due semipiani "delle ordinate positive" e "delle ordinate negative" e quindi in particolare in $(\pi, 4)$. Risulta
$f(\pi, 4) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
$f_x(x, y) = -\dfrac{1}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \Longrightarrow f_x(\pi, 4) = -\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \Longrightarrow f_y(\pi,4) = \frac{\pi}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{32}$$

e quindi l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $\left(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è

$$z - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) + \frac{\sqrt{2}\pi}{32}(y-4).$$

(c) $f(x,y) = ye^{-x^2}$ è una funzione continua e le sue derivate parziali prime sono continue in tutto il piano e quindi in particolare in $(0,1)$. Risulta $f(0,1) = 1$, $f_x(x,y) = -2xye^{-x^2}$, $f_y(x,y) = e^{-x^2}$ e quindi l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0,1,1)$ è

$$z - 1 = 0\,(x-0) + 1\,(y-1), \text{ cioè } z = y.$$

(d) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^3}$ è una funzione continua e le sue derivate parziali prime sono continue purché $1 + x^2y^3 > 0$ e quindi in particolare in $(1,2)$. Risulta

$f(1,2) = \sqrt{1+8} = 3$,

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^3}{2\sqrt{1+x^2y^3}} \Longrightarrow f_x(1,2) = \frac{8}{\sqrt{1+8}} = \frac{8}{3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{3x^2y^2}{2\sqrt{1+x^2y^3}} \Longrightarrow f_y(1,2) = \frac{12}{2\sqrt{1+8}} = 2$$

e quindi l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,2,3)$ è

$$z - 3 = \frac{8}{3}(x-1) + 2\,(y-1).$$

6. **Gradiente delle funzioni di cui ai punti 4, 5**.
Ricordiamo che $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$; quindi

4a: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (y + 2x, x)$

4b: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(\dfrac{ye^{xy}}{1+e^{xy}}, \dfrac{xe^{xy}}{1+e^{xy}}\right)$

4c: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(\sqrt{y}\cos\left(x\sqrt{y}\right), \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\cos\left(x\sqrt{y}\right)\right)$

5a: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (2x, -2y)$

5b: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(-\dfrac{1}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right), \dfrac{x}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)$

5c: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(-2xye^{-x^2}, e^{-x^2}\right)$

5d: $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(\dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2y^3}}, \dfrac{3x^2y^2}{2\sqrt{1+x^2y^3}}\right)$

7. **Trovare la velocità di variazione delle funzioni assegnate**, nei punti e nelle direzioni assegnate, significa calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y)$, nella direzione assegnata $\mathbf{v}$, nel punto assegnato (x_0, y_0). Si sa che se $f(x,y)$ ha derivate parziali prime continue, denotato con $\ell = (\cos t, \sin t)$ il versore ottenuto dividendo il vettore $\mathbf{v}$ per il suo modulo questo equivale a fare il prodotto scalare $\mathbf{grad}\,(f(x_0,y_0)) \bullet \ell$

(a) $f(x,y) = 3x - 4y$, $(x_0,y_0) = (0,2)$, vettore direzione assegnato $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}$ $\Longrightarrow$versore corrispondente $\ell = -\mathbf{i} = (-1,0)$:
$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (3,-4) = \mathbf{grad}\,(f(x_0,y_0))$ in ogni punto (x_0,y_0) del piano
velocità di variazione nella direzione assegnata: $(3,-4) \bullet (-1,0) = -3$.

(b) $f(x,y) = x^2y$, $(x_0,y_0) = (-1,-1)$, vettore direzione assegnato $\mathbf{v} = \mathbf{i}+2\mathbf{j} = (1,2)$ $\Longrightarrow$versore corrispondente $\ell = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$:

$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (2xy, x^2) \Longrightarrow \mathbf{grad}\,(f(-1,-1)) = (2,1)$
velocità di variazione nella direzione assegnata: $(2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

8. **Determinazione delle derivate parziali seconde di funzioni assegnate**
   Ricordiamo che, per il teorema di Schwartz, le due derivate miste, se sono continue, devono essere uguali.

   (a) $f(x,y) = \sqrt{3x^2 - xy + 1}$

$$f_x(x,y) = \frac{6x - y}{2\sqrt{3x^2 - xy + 1}} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = \dfrac{6\sqrt{3x^2 - xy + 1} - \dfrac{(6x-y)^2}{2\sqrt{3x^2 - xy + 1}}}{2\left(3x^2 - xy + 1\right)} \\ f_{xy}(x,y) = \dfrac{-\sqrt{3x^2 - xy + 1} - \dfrac{-x\,(6x-y)}{2\sqrt{3x^2 - xy + 1}}}{2\left(3x^2 - xy + 1\right)} \end{array}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-x}{2\sqrt{3x^2 - xy + 1}} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_{yx}(x,y) = \dfrac{-\sqrt{3x^2 - xy + 1} - \dfrac{-x\,(6x-y)}{2\sqrt{3x^2 - xy + 1}}}{2\left(3x^2 - xy + 1\right)} \\ f_{yy}(x,y) = \dfrac{x\,(-x)}{4\left(3x^2 - xy + 1\right)^{3/2}} \end{array}$$

   e in conclusione: $f_{xx}(x,y) = \dfrac{12 - y^2}{4\left(3x^2 - xy + 1\right)^{3/2}}$;

$$f_{xy}(x,y) = \frac{xy - 2}{4\left(3x^2 - xy + 1\right)^{3/2}} = f_{yx}(x,y);\ f_{yy}(x,y) = \frac{-x^2}{4\left(3x^2 - xy + 1\right)^{3/2}}$$

   (b) $f(x,y) = xe^y - ye^x$

$$f_x(x,y) = e^y - ye^x \Longrightarrow \begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = -ye^x \\ f_{xy}(x,y) = e^y - e^x \end{array}$$

$$f_y(x,y) = xe^y - e^x \Longrightarrow \begin{array}{l} f_{yx}(x,y) = e^y - e^x \\ f_{yy}(x,y) = xe^y \end{array}$$

   (c) $f(x,y) = \ln\left(1 + 2xy^2\right)$

$$f_x(x,y) = \frac{2y^2}{1 + 2xy^2} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = \dfrac{-\left(2y^2\right)^2}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} \\ f_{xy}(x,y) = 2 \cdot \dfrac{2y\left(1 + 2xy^2\right) - 4xy^3}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} = \dfrac{4y}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} \end{array}$$

$$f_y(x,y) = \frac{4xy}{1 + 2xy^2} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_{yx}(x,y) = 4 \cdot \dfrac{y\left(1 + 2xy^2\right) - 2xy^3}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} = \dfrac{4y}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} \\ f_{yy}(x,y) = 4 \cdot \dfrac{x\left(1 + 2xy^2\right) - 4x^2y^2}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} = \dfrac{4x - 8x^2y^2}{\left(1 + 2xy^2\right)^2} \end{array}$$

   (d) $f(x,y) = \arctan\left(x^2y - y^2 + x\right)$

$$f_x(x,y) = \frac{2xy + 1}{1 + \left(x^2y - y^2 + x\right)^2} \Rightarrow$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2y\left[1 + \left(x^2y - y^2 + x\right)^2\right] - 2\left(2xy + 1\right)^2\left(x^2y - y^2 + x\right)}{\left(1 + \left(x^2y - y^2 + x\right)^2\right)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{2x\left[1 + \left(x^2y - y^2 + x\right)^2\right] - 2\left(2xy + 1\right)\left(x^2 - 2y\right)\left(x^2y - y^2 + x\right)}{\left(1 + \left(x^2y - y^2 + x\right)^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2-2y}{1+(x^2y-y^2+x)^2}\Rightarrow$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{2x\left[1+(x^2y-y^2+x)^2\right]-2\,(x^2-2y)\,(2xy+1)\,(x^2y-y^2+x)}{\left(1+(x^2y-y^2+x)^2\right)^2}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{-2\left[1+(x^2y-y^2+x)^2\right]-2\,(x^2-2y)^2\,(x^2y-y^2+x)}{\left(1+(x^2y-y^2+x)^2\right)^2}$$

(e) $f(x,y)=x^2\sin y-y\sin(x^2)$

$$f_x(x,y)=2x\sin y-2xy\cos(x^2)\Longrightarrow\begin{array}{l}f_{xx}(x,y)=2\sin y-2y\cos(x^2)+4x^2y\sin(x^2)\\ f_{xy}(x,y)=2x\cos y-2x\cos(x^2)\end{array}$$

$$f_y(x,y)=x^2\cos y-\sin(x^2)\Longrightarrow\begin{array}{l}f_{yx}(x,y)=2x\cos y-2x\cos(x^2)\\ f_{yy}(x,y)=-x^2\sin y\end{array}$$

9. **Determinazione e classificazione dei punti critici di funzioni.**
Ricordiamo che i punti critici di una funzione $f(x,y)$ sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y))$ e, tra di essi, sono punti di sella quelli per i quali l'Hessiano $H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}$ è negativo, mentre sono punti di massimo o minimo locale quelli per cui $H(x,y)>0$ (massimo se $f_{xx}(x,y)<0$; minimo se $f_{xx}(x,y)>0$).

(a) $f(x,y)=xye^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$

$\mathbf{grad}\,(f(x,y))=\left((y-x^2y)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2},(x-xy^2)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}\right)=(0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases}(y-x^2y)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}=0\\ (x-xy^2)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\,(1-x^2)=0\\ x\,(1-y^2)=0\end{cases}$$

tale sistema si scompone nei due sistemi $\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}$ e $\begin{cases}x^2=1\\ y^2=1\end{cases}$

che hanno soluzioni $\boxed{(0,0),\ (1,1),\ (-1,1),\ (1,-1) \text{ e } (-1,-1)}$: questi sono i punti critici.

$f_{xx}(x,y)=\left[-xy\,(1-x^2)-2xy\right]e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}=xy\,(x^2-3)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$

$f_{xy}(x,y)=(1-y^2)\,(1-x^2)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}=f_{yx}(x,y)$ (valgono le ipotesi del teorema di Schwartz)

$f_{yy}(x,y)=\left[-xy\,(1-y^2)-2xy\right]e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}=xy\,(y^2-3)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$

Quindi l'Hessiano $H(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}\begin{vmatrix} xy\,(x^2-3) & (1-y^2)\,(1-x^2)\\ (1-y^2)\,(1-x^2) & xy\,(y^2-3)\end{vmatrix}$

i. nel punto $(0,0)$ vale $H(0,0)=e^0\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0$, per cui l'origine è un punto di sella;

ii. in ciascuno dei due punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ vale $e^{-(1+1)/2}\begin{vmatrix}1\,(1-3)&0\\0&1\,(1-3)\end{vmatrix}=$ $=4e^{-1}>0$, per cui i due punti sono estremanti locali e più precisamente massimi, in quanto $1\,(1-3)<0$;

iii. in ciascuno dei due punti $(1,-1)$ e $(-1,1)$ vale $e^{-(1+1)/2}\begin{vmatrix}-1\,(1-3)&0\\0&-1\,(1-3)\end{vmatrix}=$ $=4e^{-1}>0$, per cui i due punti sono estremanti locali e più precisamente minimi, in quanto $-1\,(1-3)>0$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$

Notiamo che la funzione è definita su ogni punto del piano che non stia sugli assi cartesiani.

$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{8}{x^2}, -\dfrac{x}{y^2} - 1\right) = (0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{8} \\ x + y^2 = 0 \\ x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{8} \\ x + \dfrac{x^4}{64} = 0 \\ x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

Poiché la soluzione $x = 0$ non può essere accettata, il sistema equivale a $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{8} \\ x^3 = -64 \end{cases}$

che ha un'unica soluzione in $\mathbb{R}^2$: $\boxed{(-4,2)}$: questo è il punto critico.

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{16}{x^3}$

$f_{xy}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2} = f_{yx}(x,y)$ (valgono le ipotesi del teorema di Schwartz)

$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x}{y^3}$

Quindi l'Hessiano $H(x,y) = \begin{vmatrix} -\dfrac{16}{x^3} & -\dfrac{1}{y^2} \\ -\dfrac{1}{y^2} & \dfrac{2x}{y^3} \end{vmatrix}$ nel punto $(4,2)$ vale $H(4,2) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{3}{16} > 0$, per cui il punto è un estremante locale (massimo in quanto $f_{yy}(4,2) = -1 < 0$)

(c) $f(x,y) = x \sin y$

$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (\sin y, x\cos y) = (0,0)$ se e solo se $\begin{cases} \sin y = 0 \\ x\cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases}$

dato che se $\sin y = 0$ il fattore $\cos y$ non può annullarsi.

Quindi i punti critici sono tutti e soli quelli della forma $\boxed{(0, k\pi), \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$.

$f_{xx}(x,y) = 0$

$f_{xy}(x,y) = \cos y = f_{yx}(x,y)$ (valgono le ipotesi del teorema di Schwartz)

$f_{yy}(x,y) = -x\sin y$

Quindi l'Hessiano $H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{vmatrix} = -(\cos y)^2$ è non positivo per ogni scelta di y; in particolare nei punti della forma $(0, k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$ risulta $H(0, k\pi) = -1 < 0$, per cui tali punti sono punti di sella.

(d) $f(x,y) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

Notiamo che la funzione è definita su ogni punto del piano che non stia sugli assi cartesiani. Notiamo inoltre che la funzione assume gli stessi valori nei punti del piano simmetrici rispetto alla retta di equazione $y = x$: quindi eventuali punti critici saranno simmetrici rispetto a tale retta. Osserviamo che

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + 1\right)$$

e simmetricamente risulta $f_y(x,y) = -\dfrac{1}{y^2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{x} + 1\right)$. Quindi

$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+1\right)=0 \\ -\dfrac{1}{y^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}+1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+1\right)=0 \\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}+1\right)=0 \end{cases}$$

l'ultimo sistema si spezza nei quattro sistemi

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{y}=0 \\ 1+\dfrac{1}{x}=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1+\dfrac{1}{y}=0 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}+1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+1=0 \\ 1+\dfrac{1}{x}=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+1=0 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}+1=0 \end{cases}$$

Essi sono equivalenti a

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x+1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y+1=0 \\ -2+\dfrac{1}{x}+1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2+\dfrac{1}{y}+1=0 \\ x+1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=0 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}+1=0 \end{cases}$$

(l'ultimo sistema è stato ottenuto sottraendo la seconda equazione alla prima). Quindi le soluzioni sono rispettivamente: $\boxed{(-1.-1),\ (1,-1),\ (-1,1)}$ e la soluzione di $\begin{cases} y=x \\ \dfrac{3}{x}+1=0 \end{cases}$ cioè $\boxed{(-3,-3)}$: questi sono i punti critici. Osserviamo che

$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = \left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{x^2y}-\dfrac{2}{x^3y}-\dfrac{1}{x^2y^2}, -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2}{xy^2}-\dfrac{2}{y^3}-\dfrac{1}{x^2y^2}-\dfrac{2}{xy^3}\right)$. Quindi

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^3y}+\dfrac{6}{x^4y}+\dfrac{2}{x^3y^2}$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{2}{x^2y^2}+\dfrac{2}{x^3y^2}+\dfrac{2}{x^2y^3} = f_{yx}(x,y)$ (valgono le ipotesi del teorema di Schwartz)

$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2}{y^3}+\dfrac{4}{xy^3}+\dfrac{6}{y^4}+\dfrac{2}{x^2y^3}+\dfrac{6}{xy^4}$

Quindi l'Hessiano $H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{x^3}\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{xy}+\dfrac{1}{y^2}\right) & \dfrac{2}{x^2y^2}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \\ \dfrac{2}{x^2y^2}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) & \dfrac{2}{y^3}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{xy}\right) \end{vmatrix}$

i. nel punto $(-3,-3)$ vale $\begin{vmatrix} -\dfrac{2}{27}\left(1-\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{9}\right) & \dfrac{2}{81}\left(1-\dfrac{2}{3}\right) \\ \dfrac{2}{81}\left(1-\dfrac{2}{3}\right) & -\dfrac{2}{27}\left(1-\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{9}\right) \end{vmatrix} = \left(\dfrac{4}{3^5}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{3^5}\right)^2 > 0,$

per cui il punto è estremante locale (minimo in quanto $f_{xx}(-3,-3) = \dfrac{4}{3^5} > 0$);

ii. nel punto $(-1,-1)$ vale $\begin{vmatrix} -2\,(1-3-2+3+1) & 2\,(1-1-1) \\ 2\,(1-1-1) & -2\,(1-2-3+1+3) \end{vmatrix} = -4 < 0$, per cui il punto è di sella;

iii. nel punto $(1,-1)$ vale $\begin{vmatrix} 2\,(1+3-2-3+1) & 2\,(1+1-1) \\ 2\,(1+1-1) & -2\,(1+2-3+1-3) \end{vmatrix} = -4 < 0$, per cui il punto è di sella;

iv. nel punto $(-1,1)$ vale $\begin{vmatrix} -2\,(1-3+2-3+1) & 2\,(1-1+1) \\ 2\,(1-1+1) & 2\,(1-2+3+1-3) \end{vmatrix} = -4 < 0$, per cui il punto è di sella.