Argomento 14: Equazioni differenziali
Esercizi

Ex. 1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} y + \sin x \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 2. Calcolare la soluzione dei problemi di Cauchy

a) $y' = (y-1)\cos x \qquad y(0) = 3;$ *b*) $y' = (y-1)\cos x \qquad y(0) = 1.$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$y' = \frac{4x}{1+x^2} y - 2x \qquad y(0) = 1$$

oppure trovare il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 4. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x + 5x^2 \qquad y(1) = 1$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 5. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' + x\mathrm{e}^x y = 3x^2 + x^4 \mathrm{e}^x$$

Si sconsiglia di usare la formula dell'integrale generale di una equazione lineare del primo ordine, ma di aiutarsi col teorema di struttura di tale integrale, sapendo che una soluzione particolare della non omogenea è del tipo $y = ax^b$, per a e b opportuni da determinarsi.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 6. Calcolare la soluzione dei problemi di Cauchy

$y' = (y^2 - 1) \qquad y(0) = 3;$ $y' = (y^2 - 1) \qquad y(0) = 1.$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 7. Con considerazioni sul segno di y' e y'', cercare di prevedere l'andamento delle soluzioni della seguente equazione differenziale:

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

Calcolare poi l'integrale generale e controllare se le previsioni fatte erano giuste.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 8. Data l'equazione differenziale:

$$y' = (\log x)\,\frac{1}{2y}\,\mathrm{e}^{y^2-1}$$

risolvere il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(\mathrm{e}) = \sqrt{2}$ e poi quello con $y(\mathrm{e}) = -1$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 9. Data l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\frac{y^2-1}{y}$$

risolvere il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(0) = 3$ e poi quello con $y(0) = -3$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 10. Calcolare, sull'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}\,,+\frac{\pi}{2}\right)$, una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

soddisfacente la condizione iniziale $y_1(0) = -1$, e poi una con la condizione iniziale $y_2(0) = 0$.
Se cerchiamo invece soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, per il punto $\left(-\frac{\pi}{2}\,,-1\right)$ passano una sola o più soluzioni?

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 11. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:

a) $$y'' - 2y' + y = \cos x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

Calcolare invece il polinomio di Mc Laurin di secondo grado della soluzione di:

b) $$y'' - 2xy' + y = 2\cos x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 12. Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale.
Determinare se la soluzione del problema di Cauchy ha un punto estremante (e se lo ha, di quale natura) in $x = 0$.

$$9y'' + 6y' + 2y = \mathrm{e}^{x/3} \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 13. Data l'equazione differenziale $ay'' + y = 0$, determinare
a) per quali valori di $a \neq 0$ le soluzioni sono limitate su tutto l'asse reale
b) per quali valori di $a \neq 0$ la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ha un minimo relativo in $x = 0$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 14. Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale, riportandosi al primo ordine mediante la sostituzione $z(x) = y\,'(x)$:

$$x\,y\,'' + y\,' = \log x$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 15. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$y\,'' + 9y = \sin 3x \qquad y(0) = 0 \qquad y\,'(0) = -\frac{1}{6}$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 16. Calcolare il polinomio di McLaurin del grado indicato, della soluzione dei seguenti problemi:

a) (3° gr.) $\quad y\,' = \log(x+y) \qquad y(0) = \mathrm{e}^{-2}$

b) (5° gr.) $\quad y\,'' + y = \arctan x \qquad y(0) = 0 \qquad y\,'(0) = 1$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 17. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$a)\quad y\,'' - 3y\,' + 2y = \mathrm{e}^x + 12x \qquad\qquad b)\quad y\,'' + y\,' + y = x^2 + x + 1$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 18. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale $y\,'' + \alpha y = 0$ ha soluzioni $y(x)$ non identicamente nulle tali che $y(0) = y(\pi) = 0$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 19. Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale $y\,' = y^2$ e stabilire se esso contiene tutte le soluzioni possibili oppure no.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 20. Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale $y\,' = (x+y)^2$, aiutandosi con il cambiamento di funzione incognita $z(x) = x + y(x)$ e ponendo in evidenza l'insieme di definizione delle soluzioni. Calcolare quindi la soluzione con condizione iniziale $y(0) = 1$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 21. Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale (di Bernoulli) dopo aver diviso ambo i membri per y^2 e operato la sostituzione di funzione incognita: $z(x) = \frac{1}{y(x)}$:

$$y\,' = -\frac{1}{x}\,y + x^4\,y^2$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Consideriamo una reazione chimica del tipo $A + B \to C$, nella quale una molecola di A più una di B danno una molecola di C.
Denotiamo con $[A]$, $[B]$, $[C]$ le concentrazioni[1] delle tre sostanze, sottintendendo la loro dipendenza dal tempo t (dovremmo scrivere $[A](t), \ldots$). Una misura della velocità della reazione è la derivata rispetto al tempo della concentrazione del prodotto C, che per le relazioni stechiometriche è opposta a quella della concentrazione dei reagenti:

$$v = [C]' = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

In alcuni casi si constata sperimentalmente che tale velocità è proporzionale al prodotto delle concentrazioni dei reagenti (più esse sono alte, più sono probabili gli "incontri" fra molecole di reagenti):

$$[C]' = k[A] \cdot [B]$$

Ma essendo, per ragioni di equilibrio stechiometrico:

$$[A] = a - [C], \qquad [B] = b - [C] \qquad\qquad \text{dove} \quad a = [A](0) \neq 0, \qquad b = [B](0) \neq 0$$

(cioè a e b indicano le concentrazioni iniziali di A e B) l'equazione diventa:

$$[C]' = k(a - [C]) \cdot (b - [C])$$

che è una equazione differenziale nell'incognita $[C]$, alla quale accostiamo, per esempio, la condizione iniziale $[C](0) = 0$. Nella usuale notazione matematica avremmo:

Ex. 22. $$y' = k(a - y) \cdot (b - y) \qquad\qquad y(0) = 0$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Alcune reazioni danno luogo alla formazione di un prodotto intermedio, secondo lo schema:
$A \to B \to C$ (per esempio in certi decadimenti radioattivi).
La sostanza A, se non viene rimpiazzata, scompare tanto più rapidamente quanto più è presente:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_a[A] \qquad\qquad [A](0) = a \qquad\qquad (k_a > 0)$$

L'intermedio B si forma da A ma decade in C, quindi, (supponendo B non presente all'inizio):

$$\frac{d[B]}{dt} = k_a[A] - k_b[B] \qquad\qquad [B](0) = 0 \qquad\qquad (k_b > 0)$$

Infine C (assente all'inizio) si forma tanto più rapidamente quanto più è presente B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k_b[B] \qquad\qquad [C](0) = 0$$

Ex. 23. Risolvere il sistema di equazioni differenziali qui sopra, per $k_a \neq k_b$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

[1] solitamente espresse in moli per decimetro cubo