Argomento 14
Esercizi: suggerimenti

Ex. 1. Equazione differenziale lineare del primo ordine, cioè del tipo: $y' + a(x)\,y = f(x)$ il cui integrale generale è dato dalla formula:

$$y(x,C) \;=\; \mathrm{e}^{-A(x)}\left[C + \int f(x)\mathrm{e}^{A(x)}\,dx\right]$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. In questo esercizio si ha: $a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$ (si noti il segno "$-$", dovuto al fatto che il termine in y compare a destra dell'uguale anziché a sinistra come nella formula sopra riportata) e $f(x) = \sin x$.
Riportando queste espressioni nella formula si ha: $A(x) = -\log|\sin x|$ e

$$y(x,C) \;=\; \mathrm{e}^{\log|\sin x|}\left[C + \int (\sin x)\,\mathrm{e}^{-\log|\sin x|}\,dx\right]$$

cioè

$$y(x,C) \;=\; |\sin x|\left[C + \int (\sin x)\frac{1}{|\sin x|}\,dx\right]$$

per $\sin x > 0:$

$$y(x,C) \;=\; (C+x)\sin x$$

per $\sin x < 0:$

$$y(x,C) \;=\; -\,(C-x)\sin x = (x-C)\sin x$$

che si possono riassumere in $y(x,C) \;=\; (C+x)\sin x$ "assorbendo" il segno nella costante. Derivando rispetto a x e sostituendo nell'equazione si può comunque constatare la correttezza dell'integrale generale calcolato. Potremmo anche omettere il valore assoluto fin dall'inizio, in quanto interessati al valore iniziale $x = \frac{\pi}{2}$, in un intorno del quale $\sin x > 0$.
Imponendo la condizione iniziale si ha $\left(C + \frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} \;=\; 1$ da cui: $C = 1 - \frac{\pi}{2}$.
Sostituendo il valore trovato nell'integrale generale, otteniamo la soluzione del problema di Cauchy:

$$y(x) \;=\; \left(x + 1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin x$$

Ex. 2. Equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.
Si devono considerare a parte i valori di y che annullano il secondo membro: in questo caso c'è solo $y = 1$, allora la funzione $y(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione del secondo problema di Cauchy.
La soluzione del primo problema, il cui valore iniziale non annulla il secondo membro dell'equazione, si ricava dall'integrale generale calcolato separando le variabili:

$$\int \frac{dy}{y-1} \;=\; \int cosx\,dx + C$$

$$\log|y-1| \;=\; \sin x + C$$

Il modulo può essere tralasciato perché y per continuità varia in un intorno di 3 e quindi $y - 1 > 0$:

$$y(x,C) - 1 \;=\; \mathrm{e}^{\sin x + C}$$

Imponendo la condizione iniziale: $2 = \mathrm{e}^{C}$ da cui: $C = \log 2$. Sostituendo nell'integrale generale:

$$y(x) \;=\; 1 + 2\mathrm{e}^{\sin x}$$

Ex. 3. Vedi impostazione esercizio 1) per il calcolo della soluzione esatta, e dell'esercizio 11b) per il calcolo del polinomio di McLaurin, che risulta uguale alla funzione in quanto quest'ultima è già di per sé un polinomio di secondo grado.

Ex. 4. Simile all'esercizio 1). Anche qui il valore assoluto che compare nel calcolo di

$$\int \frac{2}{x}\, dx \;=\; 2\log|x|$$

può essere omesso, sia perché $2\log|x| = \log(x^2)$, sia perché siamo interessati al valore iniziale $x = 1$, in un intorno del quale $x > 0$.

Ex. 5. Applicando la formula dell'integrale generale per una equazione lineare del primo ordine, avremmo:

$$y(x, K) \;=\; K\mathrm{e}^{-A(x)} + \mathrm{e}^{-A(x)} \int (3x^2 + x^4\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{A(x)}\, dx \qquad\qquad A(x) = \int x\mathrm{e}^x\, dx = (x-1)\mathrm{e}^x$$

Il primo termine della somma è l'integrale generale dell'omogenea associata, mentre il secondo termine non è altro che un integrale particolare dell'equazione completa, calcolato secondo il metodo di variazione delle costanti.
Gli integrali che compaiono qui sopra possono essere calcolati per parti; il testo dell'esercizio suggerisce però che esiste una soluzione particolare della forma $\overline{y}(x) = ax^b$, che può essere facilmente calcolata sostituendo tale espressione nell'equazione differenziale: questo procedimento richiede solo una derivazione, ed è quindi più facile delle integrazioni richieste dal metodo di variazione delle costanti.
Sostituendo $\overline{y}(x)$ nell'equazione si ottiene:

$$abx^{b-1} + x\mathrm{e}^x ax^b \;=\; 3x^2 + x^4\mathrm{e}^x$$

che è soddisfatta identicamente rispetto a x scegliendo $a = 1$ e $b = 3$.
Quindi $\overline{y}(x) = x^3$ è una soluzione particolare, e l'integrale generale della non omogenea è

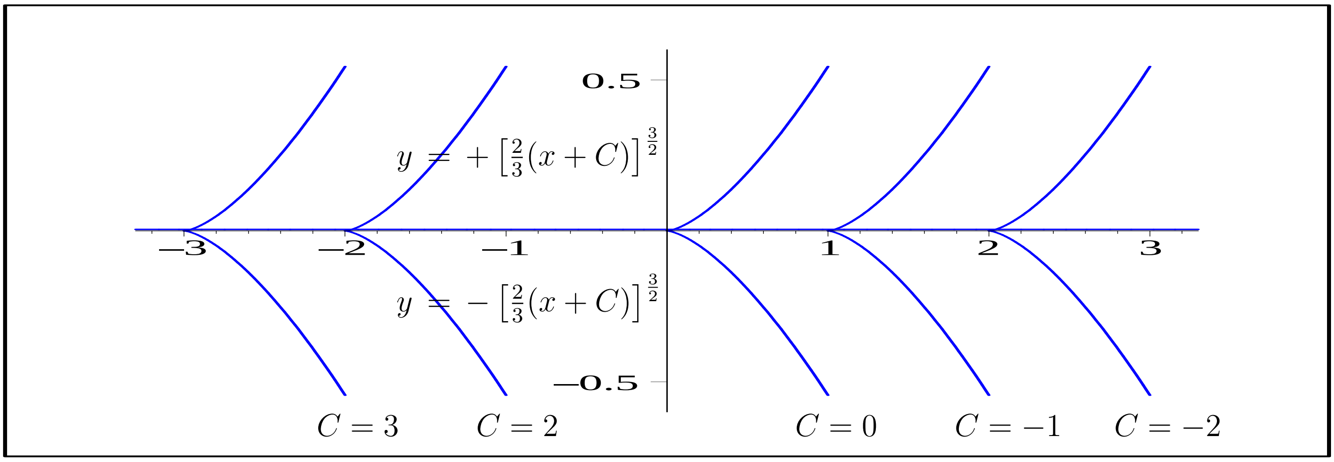
$$y(x, K) \;=\; K\mathrm{e}^{-(x-1)\mathrm{e}^x} + x^3$$

Ex. 6. Considerazioni simili a quelle fatte per l'esercizio 2).

Ex. 7. L'equazione differenziale stessa indica che il segno di $y'(x)$ coincide con quello di $y(x)$, e quindi le soluzioni che hanno il grafico nel semipiano superiore (dove $y > 0$) sono crescenti, mentre in quello inferiore sono decrescenti. Inoltre derivando rispetto a x i due membri della equazione $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$ otteniamo (ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte):

$$y''(x) = \frac{1}{3}\, y(x)^{-\frac{2}{3}} y'(x) = \frac{1}{3}\, y(x)^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{y(x)} = \frac{1}{3}\, y(x)^{-\frac{1}{3}}$$

Quindi anche $y''(x)$ ha lo stesso segno di $y(x)$ e la concavità delle soluzioni è verso l'alto nel semipiano superiore e verso il basso in quello inferiore.
Per il teorema di esistenza e unicità della soluzione passante per un punto, che in questo caso si può applicare ai punti del piano con $y \neq 0$, in tali punti le soluzioni non si possono incrociare. In base a queste informazioni possiamo ipotizzare l'andamento delle soluzioni come segue, anche senza integrare l'equazione (cosa peraltro possibile, in questo caso):



Le informazioni raccolte non permettono però di decidere se le varie soluzioni toccano l'asse orizzontale o se lo ammettono come asintoto per $x \to -\infty$. Con l'integrazione analitica possiamo accertare che è vera la prima affermazione. L'asse orizzontale stesso è grafico della soluzione $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi per i suoi punti passano almeno due soluzioni. Questo non contraddice il teorema di esistenza e unicità perché la derivata rispetto a y dell'espressione $\sqrt[3]{y}$ non è continua e limitata in un intorno di $y = 0$. Per calcolare l'integrale generale separiamo le variabili:

$$\int y^{-\frac{1}{3}}\, dy = \int dx + C$$

$$(*) \qquad \frac{3}{2}\, y^{\frac{2}{3}} = x + C \qquad \text{per} \quad x + C \geq 0$$

$$y = \pm \left[\frac{2}{3}(x+C)\right]^{\frac{3}{2}} \qquad \text{per} \quad x \geq -C$$

La condizione $x + C \geq 0$ serve a garantire che i due membri della $(*)$ abbiano lo stesso segno.

Ex. 8. Separando le variabili e integrando si perviene a:

$$y^2 = 1 - \log[x(1 - \log x) - C]$$

da cui:

$$y(x) = \pm\sqrt{1 - \log[x(1 - \log x) - C]}$$

Per ricavare il valore di C corrispondente alla condizione iniziale $y(\mathrm{e}) = \sqrt{2}$ sceglieremo la determinazione col segno $+$, mentre per la condizione $y(\mathrm{e}) = -1$ sceglieremo quella col segno $-$.

Ex. 9. Osserviamo innanzitutto che le due funzioni costanti $y(x) = \pm 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ sono soluzioni, che potremmo non ritrovare più dopo aver separato le variabili, perché i valori $y = \pm 1$ annullano un denominatore. Per gli altri valori di y, separiamo le variabili:

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\, dy = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\, dx + c$$

$$\frac{1}{2} \log|y^2 - 1| = \log(1 + \mathrm{e}^x) + c$$

$$|y^2 - 1| = \mathrm{e}^{2c}(1 + \mathrm{e}^x)^2$$

$$y^2 = K(1 + \mathrm{e}^x)^2 + 1$$

ove $K = \pm\mathrm{e}^{2c}$ è una qualunque costante, positiva o negativa, e quindi:

$$y(x) = \pm\sqrt{K(1 + \mathrm{e}^x)^2 + 1}.$$

Si noti che, anche se $K = \pm\mathrm{e}^{2c}$ non può mai essere nullo, per $K = 0$ si hanno ancora due soluzioni: quelle esaminate all'inizio.
Per quel che riguarda le condizioni iniziali valgono osservazioni analoghe a quelle dell'esercizio 8).

Ex. 10. $\qquad y' = \sqrt{1-y^2} \qquad y_1(0) = -1 \quad$ oppure $\quad y_2(0) = 0$

Osserviamo che, come nell'esercizio 9), le due funzioni costanti $y(x) = \pm 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ sono soluzioni, la seconda delle quali soddisfa la condizione $y_1(0) = -1$.
Per $y \neq \pm 1$ separiamo le variabili:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int dx + C$$

$$\arcsin y = x + C \qquad\qquad -\pi/2 < x + C < \pi/2$$

Imponendo la condizione iniziale $y_2(0) = 0$ si ottiene $C = 0$; la soluzione è quindi:

$$y_2(x) = \sin x \qquad\qquad -\pi/2 < x < \pi/2$$

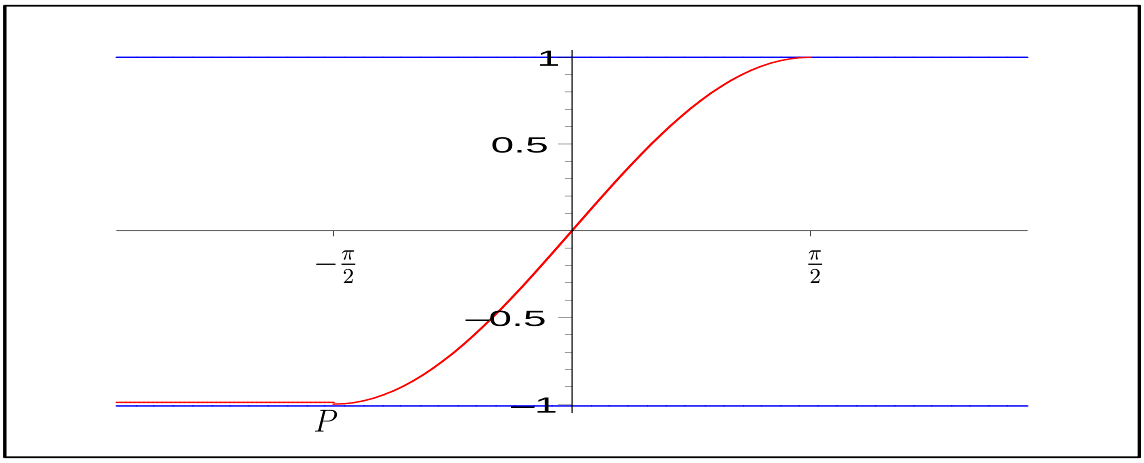
Al di fuori dell'intervallo indicato la funzione $y = \sin x$ può non soddisfare l'equazione. Infatti sostituendola in essa abbiamo:

$$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$$

che non è soddisfatta dove $\cos x < 0$.
Si può però ottenere una soluzione dell'equazione differenziale definita su tutto $\mathbb{R}$, estendendo la definizione in questo modo:

$$\widetilde{y_2}(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{per } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dunque per il punto $\quad P = (-\pi/2, -1) \quad$ passano due soluzioni: $\quad y_1(x) = -1 \quad \forall x \quad$ e la $\quad \widetilde{y_2}(x)$ ora definita.



Questo non contraddice il teorema di esistenza e unicità perché in un intorno di $y = -1$ la derivata di $y' = \sqrt{1-y^2}$ rispetto a y non è continua e limitata.

Ex. 11.

a) Equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti; l'equazione algebrica associata all'omogenea è $r^2 - 2r + 1 = 0$ e ha due radici reali e coincidenti $r = 1$.
L'integrale generale dell'omogenea associata è quindi $z(x, C_1, C_2) = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x$.
L'integrale particolare della non omogenea sarà dello stesso tipo del termine noto, cioè della forma $\overline{y}(x) = A\cos x + B\sin x$ con A e B costanti da determinarsi mediante sostituzione di $\overline{y}(x)$ e delle sue derivate nell'equazione non omogenea.
L'integrale generale della non omogenea è $y(x, C_1, C_2) = z(x, C_1, C_2) + \overline{y}(x)$. In esso imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 1$ e nella sua derivata rispetto a x la condizione iniziale $y'(0) = -1$, ottenendo un sistema lineare che dà i valori delle costanti.

b) Questa equazione è ancora lineare del secondo ordine, ma i coefficienti non sono costanti; non si può quindi procedere come al solito.
D'altra parte non viene richiesta la soluzione (che potrebbe non essere esprimibile in termini finiti), ma solo il suo polinomio di McLaurin $P_2(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2$.
Avendo già i primi due coefficienti, assegnati come condizioni iniziali, ricaviamo il terzo dall'equazione stessa che, scritta per esteso, è : $y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 2\cos x$.
Imponendo $x = 0$, e sfruttando le condizioni iniziali, ricaviamo $y''(0) = 1$.
Volendo, con derivazioni successive, potremmo ricavare il polinomio di McLaurin di grado qualsiasi; per esempio: $y'''(x) - 2y'(x) - 2xy''(x) + y'(x) = -2\sin x$ fornirebbe $y'''(0) = -1$.

Ex. 12. L'equazione algebrica $9r^2 + 6r + 2 = 0$ associata all'equazione omogenea ha due radici complesse coniugate $-\frac{1}{3} \pm i\frac{1}{3}$, quindi l'integrale generale dell'omogenea è :

$$z(x, K_1, K_2) = K_1\, e^{\left(-\frac{1}{3}+i\frac{1}{3}\right)x} + K_2\, e^{\left(-\frac{1}{3}-i\frac{1}{3}\right)x}$$

che si può scrivere in forma reale come:

$$z(x, C_1, C_2) = e^{-x/3}\left[C_1\,\sin(\frac{1}{3}\,x) + C_2\,\cos(\frac{1}{3}\,x)\right]$$

La soluzione particolare della non omogenea è dello stesso tipo del termine noto (che non è soluzione dell'omogenea), cioè : $\overline{y}(x) = A\, e^{x/3}$, con A costante da calcolarsi derivando e sostituendo nell'equazione non omogenea. Risulta $A = 1/5$.
Per stabilire se la soluzione del problema di Cauchy ha un estremo in $x = 0$, non serve calcolarla. La seconda condizione iniziale assicura già l'annullarsi della derivata in $x = 0$. Basta calcolare $y''(0)$ come nell'esercizio 11b) e trarre le dovute conclusioni in base al suo segno.

Ex. 13.

a) L'equazione algebrica associata all'omogenea è $ar^2 + 1 = 0$ che per $a < 0$ ha radici reali ed opposte, mentre per $a > 0$ ha radici complesse e coniugate (e immaginarie pure).
Nel primo caso quindi l'integrale generale è una combinazione lineare di due esponenziali reali, che è necessariamente illimitata su $\mathbb{R}$, nel secondo caso l'integrale generale è una combinazione lineare di seno e coseno, che è limitata su $\mathbb{R}$.

b) Come negli esercizi 11b) e 12) si ricava, direttamente dall'equazione e dalle condizioni iniziali, il valore di $y''(0)$, che in questo caso risulterà dipendere dal parametro a, e lo si pone maggiore di zero, per avere un minimo in $x = 0$.

Ex.14.

$$x\,y'' + y' = \log x$$

Equazione lineare del secondo ordine, ma i coefficienti non sono costanti e quindi non si applica il solito procedimento. La mancanza del termine in y permette di vederla come equazione del primo ordine nella incognita $z(x) = y'(x)$. Di conseguenza $y''(x) = z'(x)$ e l'equazione diventa:

$$z' + \frac{1}{x}\,z = \frac{\log x}{x}$$

(Si è anche diviso per x per avere la forma canonica alla quale si riferisce la formula risolutiva)

$$z(x,K) = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\left[K + \int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx\right] = \ldots = \frac{K}{x} + \log x - 1$$

Passando alle primitive si ottengono le soluzioni dell'equazione originaria:

$$y(x,K,C) = \int z(x,K)\,dx = K\log x + x(\log x - 1) - x + C$$

Ex.15. $\quad y'' + 9y = \sin 3x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = -\dfrac{1}{6}$

Equazione lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea.
Equazione algebrica associata all'omogenea: $r^2 + 9 = 0$, soluzioni immaginarie coniugate: $r = \pm 3i$
Integrale generale omogenea:

$$z(x, C_1, C_2) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

L'integrale particolare va cercato nella forma

$$\overline{y}(x) = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

dove il fattore x che precede la parentesi è necessario perché il termine noto $\sin 3x$ è soluzione dell'omogenea associata. Sono necessari sia il termine con $\sin 3x$ sia quello con $\cos 3x$, anche se nel termine noto compare solo quello con $\sin 3x$.
Per determinare le costanti A e B si deriva e si sostituisce nell'equazione, ottenendo: $A = -\frac{1}{6}$ e $B = 0$.
Integrale generale:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6}\, x \cos 3x$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene un sistema in C_1 e C_2 che ha per soluzioni (**vedi i conti più sotto**) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, che significa che $\overline{y}$ è proprio la soluzione particolare della non omogenea che soddisfa le condizioni iniziali (**questo naturalmente capita per caso:** la soluzione che soddisfa determinate condizioni iniziali in genere è diversa dalla soluzione particolare dell'equazione non omogenea che si calcola per costruire l'integrale generale).

Conti per il calcolo della soluzione soddisfacente le condizioni iniziali:

$$\overline{y}(x) = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$\overline{y}'(x) = (A \cos 3x + B \sin 3x) + x(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)$$

$$\overline{y}''(x) = (-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + (-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + x(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x)$$

Sostituiamo nell'equazione

$$y'' + 9y = \sin 3x$$

ottenendo:

$$(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + (-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) = \sin 3x$$

(l'ultimo termine di $\overline{y}''$ si cancella con $9\overline{y}$, così che tutti i termini in $x \sin 3x$ o $x \cos 3x$ scompaiono)

$$-6A \sin 3x + 6B \cos 3x = \sin 3x$$

e per il principio di identità dei polinomi trigonometrici, quest'ultima è identicamente soddisfatta se e solo se:

$$A = -\frac{1}{6} \qquad\qquad B = 0$$

In conclusione, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è :

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{6} x \cos 3x$$

Ex.16. *a)* $$y' = \log(x+y) \qquad y(0) = \mathrm{e}^{-2}$$

L'equazione non è né lineare né a variabili separabili, ma è richiesta solo la formula di McLaurin della soluzione (vedi esercizio 11b):

$$y'(x) = \log(x + y(x)) \qquad \text{da cui} \qquad y'(0) = -2$$

$$y''(x) = \frac{1 + y'(x)}{x + y(x)} \qquad \text{da cui} \qquad y''(0) = -\mathrm{e}^2$$

$$y'''(x) = \frac{y''(x)[x + y(x)] - [1 + y'(x)]^2}{[x + y(x)]^2} \qquad \text{da cui} \qquad y'''(0) = -2\mathrm{e}^4$$

Si ottiene così il risultato:

$$P_3(x) = \mathrm{e}^{-2} - 2x - \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2 - \frac{2\mathrm{e}^4}{3!}x^3$$

Ex.16. *b)* $$y'' + y = \arctan x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

L'equazione è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, ma il termine noto non è né un esponenziale, né una funzione trigonometrica, né un polinomio, quindi non sappiamo calcolare una soluzione particolare della non omogenea (Si potrebbe, col metodo di variazione delle costanti che porta spesso a conti complicati) Anche qui è richiesta solo la formula di Taylor della soluzione:

$$y''(x) = -y(x) + \arctan x \qquad \text{da cui} \qquad y''(0) = 0$$

$$y'''(x) = -y'(x) + \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{da cui} \qquad y'''(0) = 0$$

$$y^{(4)}(x) = -y''(x) - \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \qquad \text{da cui} \qquad y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)}(x) = -y'''(x) - \frac{2(1 + x^2)^2 - 8x^2(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} \qquad \text{da cui} \qquad y^{(5)}(0) = -2$$

Si ottiene così il risultato:

$$P_5(x) = x - \frac{2}{5!}x^5$$

Ex.17. *a)* $$a)\quad y'' - 3y' + 2y = 12x + \mathrm{e}^x$$

Equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea.
Equazione algebrica associata all'omogenea: $r^2 - 3r + 2 = 0$.
Radici reali e distinte $r_1 = 1$, ed $r_2 = 2$.
Integrale generale omogenea:

$$z(x, K_1, K_2) = K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{2x}$$

Poiché il termine noto dell'equazione lineare non omogenea è somma di un polinomo di primo grado (ridotto a un monomio) e di un esponenziale, un integrale particolare della non omogenea si potrà trovare come somma di un opportuno polinomio di primo grado $\overline{y_1}(x) = ax + b$ e di una funzione $\overline{y_2}(x) = Ax\mathrm{e}^x$ con un esponenziale simile al termine noto, ma moltiplicato per x perché il termine noto è soluzione dell'omogenea associata.
Sostituendo $\overline{y_1}(x)$ e le sue derivate a sinistra dell'uguale nell'equazione, e imponendo che il risultato sia $12x$, si ottengono $a = 6$ e $b = 9$.
Sostituendo $\overline{y_2}(x)$ e le sue derivate a sinistra dell'uguale nell'equazione, e imponendo che il risultato sia e^x, si ottiene $A = -1$.
Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x, K_1, K_2) = K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{2x} + 6x + 9 - x\mathrm{e}^x$$

Ex.17. *b)* $$y'' + y' + y = x^2 + x + 1$$

Equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea.
Equazione algebrica associata all'omogenea:

$$r^2 + r + 1 = 0 \qquad \text{radici complesse coniugate} \qquad r_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Integrale generale omogenea associata:

$$z(x, K_1, K_2) = K_1\mathrm{e}^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + K_2\mathrm{e}^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left[K_1\mathrm{e}^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + K_2\mathrm{e}^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right] = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

Integrale particolare della non omogenea da cercarsi nella forma

$$\overline{y}(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{trovando} \qquad a = 1 \quad b = -1 \quad c = 0$$

Integrale generale:

$$y(x, C_1, C_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + x^2 - x$$

Ex.18. $\qquad y'' + \alpha y = 0 \qquad y(0) = y(\pi) = 0$

Osserviamo prima di tutto che le “condizioni ai limiti” assegnate (valore della funzione incognita nei due estremi di un certo intevallo) non sono “condizioni iniziali” (valore della funzione incognita e della sua derivata per uno stesso valore di x) e quindi non garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione.
Equazione algebrica associata:

$$r^2 + \alpha = 0 \qquad r = \begin{cases} \pm\sqrt{-\alpha} & \text{se} \quad \alpha < 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha} & \text{se} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

L'integrale generale è di conseguenza:

$$y(x, K_1, K_2) = \begin{cases} K_1 \mathrm{e}^{x\sqrt{-\alpha}} + K_2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{-\alpha}} & \text{se} \quad \alpha < 0 \\ K_1 x + K_2 & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ K_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sqrt{\alpha}} + K_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\sqrt{\alpha}} = C_1 \cos(x\sqrt{\alpha}) + C_2 \sin(x\sqrt{\alpha}) & \text{se} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

Nei primi due casi le condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$ implicano $K_1 = K_2 = 0$ e quindi non si hanno soluzioni non nulle.
Nel caso $\alpha > 0$:

$$y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

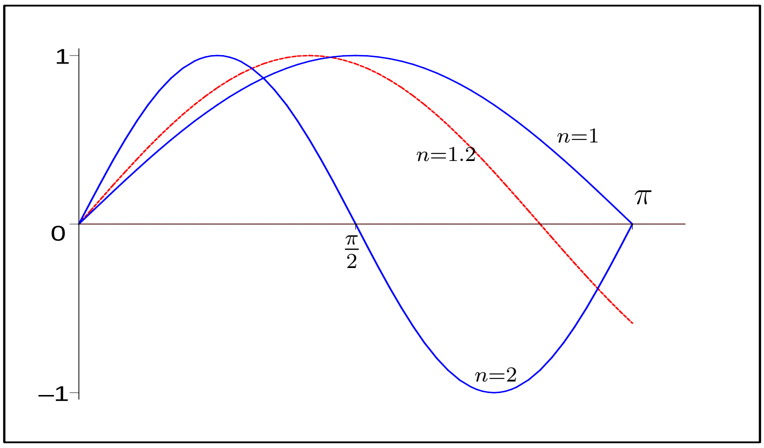
$$y(\pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 \sin(\pi\sqrt{\alpha}) = 0$$

Volendo avere $C_2 \neq 0$ (perché si ha già $C_1 = 0$) è necessario che $\sin(\pi\sqrt{\alpha}) = 0$, da cui segue

$$\pi\sqrt{\alpha} = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = n^2$$

e le corrispondenti soluzioni non nulle sono:

$$y(x) = C_2 \sin nx$$



Per esempio, per $n = 1$ o $n = 2$ (cioè interi) le corrispondenti soluzioni soddisfano la condizione $y(\pi) = 0$, mentre per $n = 1.2$ (non intero) la condizione non è soddisfatta, e quindi le funzioni, pur essendo soluzioni dell'equazione per ogni C_2, non sono soluzioni del problema ai limiti.

Ex.19. $$y' = y^2$$

Equazione a variabili separabili. La funzione: $\quad y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad$ è soluzione. Per $y \neq 0$:

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int dx + C$$

$$-\frac{1}{y} = x + C \qquad \text{cioè} \qquad y(x, C) = -\frac{1}{x + C}$$

e si vede che l'integrale generale non contiene la soluzione $y(x) = 0$ per nessun valore di C

Ex.20. $$y' = (x + y)^2$$

L'equazione non è a variabili separabili, ma il cambiamento di funzione incognita: $z(x) = x + y(x)$ la rende tale. Infatti di conseguenza, $z'(x) = 1 + y'(x)$ e l'equazione diventa:

$$z' = 1 + z^2$$

$$\int \frac{1}{1 + z^2}\, dz = \int dx + C$$

$$(*) \qquad \arctan z = x + C \qquad -\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}$$

$$z(x, C) = \tan(x + C) \qquad -C - \frac{\pi}{2} < x < -C + \frac{\pi}{2}$$

$$y(x, C) = \tan(x + C) - x \qquad -C - \frac{\pi}{2} < x < -C + \frac{\pi}{2}$$

La condizione $y(0) = 1$ corrisponde a $z(0) = 1$; imponendola nella $(*)$, si ottiene: $C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x \qquad -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$$

Ex.21. $$y' = -\frac{1}{x}\, y + x^4\, y^2$$

L'equazione non è lineare ma, dividendo per y^2 (dopo aver osservato direttamente che $y(x) = 0 \quad \forall x$ è soluzione), si ha

$$(**) \qquad \frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} + x^4$$

che diventa lineare col cambiamento di funzione incognita

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad \text{dalla quale segue :} \qquad z'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}$$

che sostituite nella $(**)$ danno:

$$z' = \frac{1}{x} z - x^4$$

Si conclude integrando con la formula per le lineari del primo ordine e tornando alla $y(x)$.

Ex. 22. $\qquad y' = k(a-y)\cdot(b-y) \qquad\qquad y(0)=0$

Equazione a variabili separabili. Le funzioni costanti $y(t) = a$, $y(t) = b$ $\forall t \in \mathbb{R}$, sono soluzioni, ma non soddisfano la condizione iniziale. Per $y \neq a$ e $y \neq b$:

$$(*) \qquad \int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \int k\,dt + C$$

Per calcolare la primitiva di sinistra è necessario distinguere il caso $a \neq b$ dal caso $a = b$.

Caso $a \neq b$

$$\int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \frac{1}{a-b}\int \left(\frac{-1}{a-y} + \frac{1}{b-y}\right) dy = \frac{1}{a-b}\log\frac{a-y}{b-y} = kt + C$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$, si ricava $C = \dfrac{1}{a-b}\log\dfrac{a}{b}$ che sostituito nella precedente dà la soluzione in forma implicita:

$$(\diamond) \qquad \frac{1}{a-b}\log\frac{b(a-y)}{a(b-y)} = kt$$

dalla quale, risolvendo rispetto a y, si ottiene la forma esplicita

$$(*) \qquad y(t) = ab\frac{1-\mathrm{e}^{(a-b)kt}}{b-a\mathrm{e}^{(a-b)kt}}$$

Caso $a = b$

$$\int \frac{1}{(a-y)^2}\,dy = \frac{1}{a-y} = kt + C$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si ricava $C = \dfrac{1}{a}$ che sostituito nella precedente dà

$$(\diamond) \qquad \frac{y}{a(a-y)} = kt$$

dalla quale, risolvendo rispetto a y, si ottiene la forma esplicita

$$(*) \qquad y(t) = \frac{a^2kt}{akt+1}$$

Osserviamo che dalle soluzioni in forma esplicita $(*)$ si possono ricavare informazioni sul valore limite per $t \to +\infty$, ma dal punto di vista delle applicazioni alla cinetica chimica è più utile la forma implicita $(\diamond)$. Si tratta infatti di determinare sperimentalmente il valore della costante k (a una certa temperatura). La concentrazione y del prodotto della reazione può essere misurata in diversi istanti di tempo $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e quindi si possono determinare sperimentalmente i valori $z_1, z_2, \ldots, z_n$ assunti in questi istanti dall'espressione a sinistra del segno di uguale nella $(\diamond)$. Poiché tale epressione è una funzione lineare del tempo, col metodo di regressione lineare (minimi quadrati) si trova poi il valore di k che si adatta meglio ai valori sperimentali.

Ex. 23.

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -k_a[A] & [A](0) = a \\ \frac{d[B]}{dt} = k_a[A] - k_b[B] & [B](0) = 0 \\ \frac{d[C]}{dt} = k_b[B] & [C](0) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema "triangolare" e quindi di facile soluzione. Infatti nella prima equazione, a variabili separabili, compare solo l'incognita $[A]$. Risolvendola e sostituendo tale funzione nella seconda, che è lineare, essa diventa in una sola incognita $[B]$. Sostituendo la soluzione della seconda nella terza, quest'ultima si risolve con un semplice calcolo di primitiva.
La soluzione della prima è :

$$[A] = a\mathrm{e}^{-k_a t}$$

che sostituita nella seconda la trasforma in:

$$\frac{d[B]}{dt} + k_b[B] = k_a a\mathrm{e}^{-k_a t} \qquad [B](0) = 0$$

che ha integrale generale:

$$[B](t, Q) = \mathrm{e}^{-\int k_b\,dt}\left[Q + \int k_a a\mathrm{e}^{-k_a t}\mathrm{e}^{\int k_b\,dt}\,dt\right]$$

ossia, per $k_a \neq k_b$:

$$[B](t, Q) = \mathrm{e}^{-k_b t}\left[Q + \int k_a a\mathrm{e}^{-k_a t}\mathrm{e}^{k_b t}\,dt\right] = \mathrm{e}^{-k_b t}\left[Q + \frac{k_a a}{k_b - k_a}\mathrm{e}^{(k_b - k_a)t}\,dt\right]$$

Imponendo la condizione $[B](0) = 0$ si ricava Q e quindi:

$$[B] = \frac{k_a a}{k_b - k_a}\left[\mathrm{e}^{-k_a t} - \mathrm{e}^{-k_b t}\right]$$

Infine, sostituendo nella terza e calcolando la primitiva che si annulla per $t = 0$:

$$[C] = a\left[1 + \frac{1}{k_a - k_b}\left(k_b\mathrm{e}^{-k_a t} - k_a\mathrm{e}^{-k_b t}\right)\right]$$

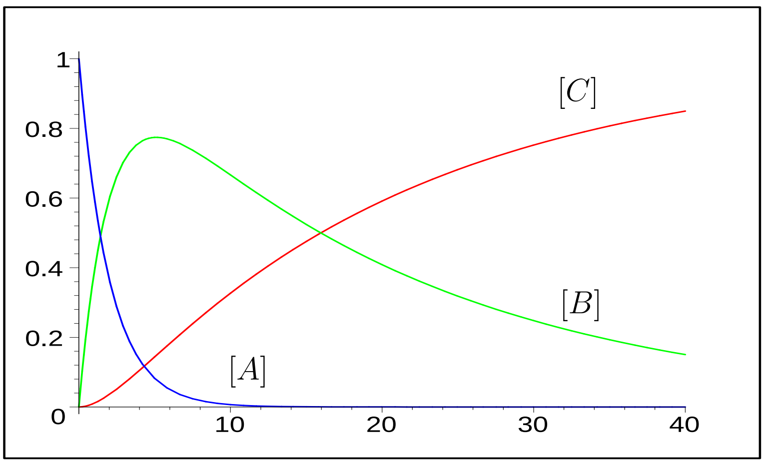


Grafico corrispondente al caso $\quad a = 1, \quad k_a = 0.5, \quad k_b = 0.05.$

Argomento 14
Soluzioni Esercizi

Ex. 1.

$$y(x) = x\,\sin x + (1 - \frac{\pi}{2}\,)\,\sin x$$

Ex. 2.

$$a) \qquad y(x) = 1 + 2\,\mathrm{e}^{\sin x} \qquad\qquad b) \qquad y(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex. 3.

$$y(x) = 1 + x^2 \qquad\qquad P_2(x) = 1 + x^2$$

Ex. 4.

$$y(x) \;=\; x^2\,[2\log x + 5x - 4]$$

Ex. 5.

$$y(x, K) \;=\; K\,\mathrm{e}^{(1-x)\mathrm{e}^x} + x^3$$

Ex. 6.

$$y(x) = \frac{2 + \mathrm{e}^{2x}}{2 - \mathrm{e}^{2x}} \qquad\qquad y(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex. 7.

$$y(x, C) \;=\; \pm\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} (x + C)^{3/2} \quad \text{per} \quad x \geq -C \qquad\qquad \text{e} \qquad y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex. 8.

$$y(x) \;=\; \sqrt{1 - \log\left[x(1 - \log x) + \mathrm{e}^{-1}\right]} \qquad\qquad y(x) \;=\; -\sqrt{1 - \log\left[x(1 - \log x) + 1\right]}$$

Ex. 9.

$$y(x) \;=\; \sqrt{1 + 2(1 + \mathrm{e}^x)^2} \qquad\qquad y(x) \;=\; -\sqrt{1 + 2(1 + \mathrm{e}^x)^2}$$

Ex. 10.

$$y_1(x) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad y_2(x) \;=\; \sin x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Per il punto $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ passano entrambe le soluzioni (pensando di prolungare la definizione della seconda ponendo: $y_2(x) = -1$ per $x \leq -\frac{\pi}{2}$).

Ex. 11.

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^x - \frac{3}{2}\,x\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\,\sin x \qquad\qquad P_2(x) \;=\; 1 - x + \frac{1}{2}\,x^2$$

Ex. 12.

$$y(x, C_1, C_2) = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{x/3} + \mathrm{e}^{-x/3}\,\left[C_1\,\sin(\frac{1}{3}\,x) + C_2\,\cos(\frac{1}{3}\,x)\right]$$

Il punto $x = 0$ è di massimo relativo per la soluzione del problema di Cauchy.

Ex. 13.

$$a) \quad a > 0 \qquad\qquad b) \quad a < 0$$

Ex. 14.

$$y(x,K,C) = K\log x + x\log x - 2x + C$$

Ex. 15.

$$y(x) = -\frac{1}{6}\,x\cos 3x \qquad\qquad y(x,C_1,C_2) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{1}{6}\,x\cos 3x$$

Ex. 16.

$$a) \quad P_3(x) = \mathrm{e}^{-2} - 2x - \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2 - \frac{2\mathrm{e}^4}{3!}x^3. \qquad\qquad b) \quad P_5(x) = x - \frac{1}{60}x^5$$

Ex. 17.

a)
$$y(x,K_1,K_2) = K_1\,\mathrm{e}^x + K_2\,\mathrm{e}^{2x} + 6x + 9 - x\,\mathrm{e}^x$$

b)
$$y(x,C_1,C_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + x^2 - x$$

Ex. 18.

Per $\alpha = n^2, \quad n \in \mathbb{N}:$

$$y(x,C) = C\sin\sqrt{\alpha}x = C\sin nx$$

Ex. 19.

$$y(x,C) = -\frac{1}{x+C} \qquad \text{non contiene la soluzione}: \quad y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex. 20.

$$y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x \qquad\qquad -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$$

Ex. 21.

$$y(x,C) = \frac{4}{x(C - x^4)} \qquad\qquad y(x) = 0 \qquad \forall x \neq 0$$

Ex. 22.

$$\frac{1}{a-b}\log\frac{b(a-y)}{a(b-y)} = kt \qquad \text{da cui} \qquad y(t) = ab\frac{1-\mathrm{e}^{(a-b)kt}}{b - a\mathrm{e}^{(a-b)kt}} \qquad \text{se} \quad a \neq b$$

$$\frac{y}{a(a-y)} = kt \qquad \text{da cui} \qquad y(t) = \frac{a^2kt}{akt+1} \qquad \text{se} \quad a = b$$

Ex. 23.

$$[A] = a\mathrm{e}^{-k_at} \qquad [B] = \frac{k_a a}{k_b - k_a}\left[\mathrm{e}^{-k_at} - \mathrm{e}^{-k_bt}\right] \qquad [C] = a\left[1 + \frac{1}{k_a - k_b}\left(k_b\mathrm{e}^{-k_at} - k_a\mathrm{e}^{-k_bt}\right)\right]$$