Equazioni differenziali

Soluzioni degli esercizi

Premessa: in tutti gli esercizi x denota la variabile indipendente, y la funzione (di x) incognita dell'equazione differenziale.
Un'equazione differenziale è detta lineare

- del primo ordine se si può ricondurre alla forma $y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x)$ con $a(x)$ e $f(x)$ continue in uno stesso intervallo della retta reale; omogenea se $f(x) = 0$; a coefficienti costanti se $a(x)$ è una funzione costante;

- del secondo ordine se si può ricondurre alla forma $y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x)$ con $a(x)$, $b(x)$, e $f(x)$ continue in uno stesso intervallo della retta reale; omogenea se $f(x) = 0$; a coefficienti costanti se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni costanti;

- ecc.

Sol. Ex.1

1. $y' = 5y - x$: equazione differenziale **lineare** del **primo** ordine non omogenea a coefficienti **costanti**.

2. $y'' + x = y$: equazione differenziale **lineare** del **secondo** ordine non omogenea a coefficienti **costanti**.

3. $yy' = x$: equazione differenziale del primo ordine a **variabili separabili**.

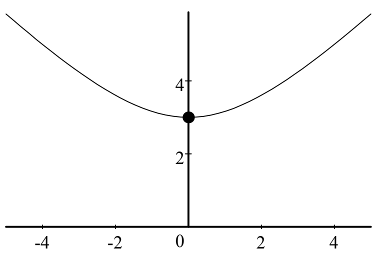
4. $y'' + (x \sin x)\, y' = y$: equazione differenziale **lineare** del **secondo** ordine **omogenea** a coefficienti non costanti.

5. $y'' + 4y' - 3y = 2y^2$: equazione differenziale non lineare (y compare al quadrato!) del **secondo** ordine.

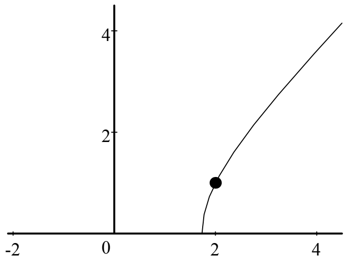
6. $y''' + xy' = x^2 y$: equazione differenziale **lineare** del **terzo** ordine **omogenea** a coefficienti non costanti.

Sol. Ex.2

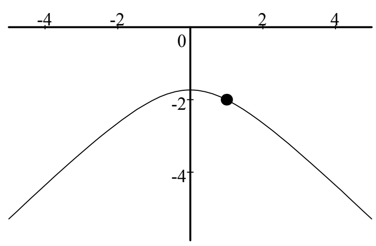
1. $yy' = x \iff \int y\,dy = \int x\,dx \iff y^2 = x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R} \iff y = \sqrt{x^2 + c}$ oppure $y = -\sqrt{x^2 + c}$ con $c \in \mathbb{R}$. Ecco le curve integrali corrispondenti ad alcune condizioni iniziali



$y(0) = 3 \Rightarrow\ y = \sqrt{x^2 + 9}$



$y(2) = 1\ \Rightarrow\ y = \sqrt{x^2 - 3}$



$y(1) = -2 \Rightarrow y = -\sqrt{x^2 + 3}$

2. $y' = \dfrac{3y-1}{x}$ è equazione differenziale lineare del I ordine non omogenea: $y' - \dfrac{3}{x}y = -\dfrac{1}{x}$.

   (a) Soluzioni dell'omogenea associata $(y' - \frac{3}{x}y = 0)$: $y(x) = kx^3$ con $k \in \mathbb{R}$.

   (b) Soluzione particolare (metodo di variazione delle costanti): $\overline{y}(x) = \dfrac{1}{3x^3} \cdot x^3 = \dfrac{1}{3}$

   (c) Integrale generale: $y(x) = \dfrac{1}{3} + kx^3$ con $k \in \mathbb{R}$.

3. $y' = x^2y^2$ è equazione differenziale del I ordine a variabili separabili.

   (a) Soluzioni particolari da isolare prima di separare le variabili: $y(x) = 0$.

   (b) $\int \dfrac{dy}{y^2} = \int x^2 dx \iff -\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^3}{3} + c$ con $c \in \mathbb{R}$

   (c) Integrale generale: $y(x) = -\dfrac{3}{x^3+3c}$ con $c \in \mathbb{R}$.

4. $y' = y \ln x$ è equazione differenziale lineare del I ordine omogenea non a coefficienti costanti: $y' - (\ln x)\, y = 0$. Integrale generale: $y(x) = ke^{x \ln x - x}$, cioè $y(x) = k\left(\frac{x}{e}\right)^x$, con $k \in \mathbb{R}$.

5. $y' = 5y - x$ è equazione differenziale lineare del I ordine non omogenea a coefficienti costanti: $y' - 5y = -x$.

   (a) Soluzioni dell'omogenea associata $(y' - 5y = 0)$: $y(x) = ke^{5x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

   (b) Soluzione particolare (metodo di variazione delle costanti): $\overline{y}(x) = e^{5x} \int -xe^{-5x}dx = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{25}$

   (c) Integrale generale: $y(x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{25} + ke^{5x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

6. $y' = \dfrac{2y}{x} + x^2$ è equazione differenziale lineare del I ordine non omogenea, non a coefficienti costanti: $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2$.

   (a) Soluzioni dell'omogenea associata $(y' - \frac{2}{x}y = 0)$: $y(x) = kx^2$ con $k \in \mathbb{R}$.

   (b) Soluzione particolare (metodo di variazione delle costanti): $\overline{y}(x) = x^3$

   (c) Integrale generale: $y(x) = x^3 + kx^2$ con $k \in \mathbb{R}$.

7. $y' + y = e^x$ è equazione differenziale lineare del I ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

   (a) Soluzioni dell'omogenea associata $(y' + y = 0)$: $y(x) = ke^{-x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

   (b) Soluzione particolare (metodo di variazione delle costanti): $\overline{y}(x) = \left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right) e^{-x} = \dfrac{1}{2}e^x$.

   (c) Integrale generale: $y(x) = \dfrac{1}{2}e^x + ke^{-x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

8. $y'' - 5y' - 6y = 0$ è equazione differenziale lineare del II ordine omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 - 5r - 6 = 0$): $r_1 = 6$, $r_2 = -1$.

(b) Ci sono 2 soluzioni particolari "indipendenti": $y_1(x) = e^{6x}$, $y_2(x) = e^{-x}$.

(c) Integrale generale: $y(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-x}$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

9. $y'' + 2y' + 3y = 0$ è equazione differenziale lineare del II ordine omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 + 2r + 3 = 0$): $r_1 = -1 - i\sqrt{2}$, $r_2 = -1 + i\sqrt{2}$.

(b) Ci sono 2 soluzioni particolari "indipendenti" reali: $y_1(x) = e^{-x}\cos\left(\sqrt{2}x\right)$, $y_2(x) = e^{-x}\sin\left(\sqrt{2}x\right)$.

(c) Integrale generale: $y(x) = e^{-x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

10. $9y'' + 6y' + y = 0$ è equazione differenziale lineare del II ordine omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Soluzione dell'equazione caratteristica ($9r^2 + 6r + 1 = 0$): $r = -\frac{1}{3}$.

(b) Ci sono 2 soluzioni particolari "indipendenti": $y_1(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$, $y_2(x) = xe^{-\frac{1}{3}x}$.

(c) Integrale generale: $y(x) = e^{-\frac{1}{3}x}(c_1 + c_2 x)$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

11. $y'' + y' - 2y = x$ è equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Equazione omogenea associata: $y'' + y' - 2y = 0$.

(b) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 + r - 2 = 0$): $r_1 = -2$, $r_2 = 1$.

(c) Integrale generale dell'omogenea associata: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

(d) Soluzione particolare (polinomio di I grado in x, essendo il coeff. di y diverso da 0): $\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

(e) Integrale generale: $y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

12. $y'' - y' - 6y = e^{-2x}$ è equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Equazione omogenea associata: $y'' - y' - 6y = 0$.

(b) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 - r - 6 = 0$): $r_1 = -2$, $r_2 = 3$.

(c) Integrale generale dell'omogenea associata: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

(d) Soluzione particolare: $\overline{y}(x) = -\frac{x}{5}e^{-2x}$ (poiché il coefficiente -2 dell'esponente del termine noto dell'eq. diff. è soluzione dell'equazione caratteristica, ma $2 \cdot (-2) + (-1) \neq 0$).

(e) Integrale generale: $y(x) = -\frac{x}{5}e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

13. $y'' + 2y' = xe^x$ è equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Posto $y' = z$ e $y'' = z'$: ci si riconduce all'equazione differenziale lineare del I ordine $z' + 2z = xe^x$.

(b) Equazione omogenea associata: $z' + 2z = 0$.

(c) Soluzioni dell'equazione omogenea associata: $z = ke^{-2x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

(d) Soluzione particolare (metodo di variazione delle costanti): $\overline{z}(x) = e^{-2x} \int xe^{3x} dx = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x$.

(e) Integrale generale dell'equazione differenziale del I ordine $z(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x$ con $k \in \mathbb{R}$.

(f) Integrale generale dell'equazione assegnata: $y(x) = \int \left(ke^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x\right) dx = -\frac{k}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}(x-1)e^x - \frac{1}{9}e^x + c_2 = \frac{1}{3}\left(x - \frac{4}{3}\right)e^x + c_1e^{-2x} + c_2$ con $c_1 = -\frac{k}{2}$, c_2 variabili in $\mathbb{R}$.

14. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$ è equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Equazione omogenea associata: $y'' + 2y' + 2y = 0$.

(b) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 + 2r + 2 = 0$): $r_1 = -1 + i$, $r_2 = -1 - i$.

(c) Integrale generale dell'omogenea associata: $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

(d) Soluzione particolare: $\overline{y}(x) = \frac{1}{8}e^x(\sin x - \cos x)$ (vedi punto (f)).

(e) Integrale generale: $y(x) = \frac{1}{8}e^x(\sin x - \cos x) + e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

(f) Per ricavare l'integrale particolare ci sono 2 vie:

i. Vedere se esiste una soluzione della forma $\overline{y}(x) = e^x(k_1 \cos x + k_2 \sin x)$. Allora $\overline{y}'(x) = e^x[(k_1 + k_2)\cos x + (k_2 - k_1)\sin x]$ e $\overline{y}''(x) = e^x(2k_2 \cos x - 2k_1 \sin x)$. Da qui, sostituendo nell'equazione e semplificando e^x, si ha $(4k_1 + 4k_2)\cos x = (4k_1 + 1 - 4k_2)\sin x$. Quest'uguaglianza deve essere vera per ogni x e quindi risulta $\begin{cases} 4k_1 + 4k_2 = 0 \\ -4k_1 + 4k_2 = 1 \end{cases}$ cioè $k_2 = -k_1 = \frac{1}{8}$.

ii. Osservare che $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e quindi trovare una soluzione particolare y_+ di $y'' + 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ e una soluzione particolare y_- di $y'' + 2y' + 2y = e^{(1-i)x}$ e porre poi $\overline{y}(x) = \dfrac{(y_+) - (y_-)}{2i}$. Si ha
$y_+ = c(x)e^{(1+i)x}$, $y_+' = (c' + (1+i)c)e^{(1+i)x}$, $y_+'' = \left[c'' + 2(1+i)c' + (1+i)^2 c\right]e^{(1+i)x}$, da cui $c'' + 2(2+i)c' + 4(1+i)c = 1$: si può scegliere $c(x) = \frac{1}{4(1+i)}$, e quindi $y_+ = \frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.
Similmente
$y_- = c(x)e^{(1-i)x}$, $y_-' = (c' + (1-i)c)e^{(1+i)x}$, $y_+'' = \left[c'' + 2(1-i)c' + (1-i)^2 c\right]e^{(1+i)x}$, da cui $c'' + 2(2-i)c' + 4(1-i)c = 1$: si può scegliere $c(x) = \frac{1}{4(1-i)}$, e quindi $y_- = \frac{1+i}{8}e^{(1-i)x}$. Ne consegue che
$\overline{y}(x) = \frac{1-i}{16i}e^{(1+i)x} - \frac{1+i}{16i}e^{(1-i)x} = \frac{1}{16i}\left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}\right) - \frac{1}{16}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\right) = \frac{1}{8}e^x(\sin x - \cos x)$.

15. $y'' + 4y = x^2$ è equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Equazione omogenea associata: $y'' + 4y = 0$.

(b) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 + 4 = 0$): $r_1 = -2i$, $r_2 = 2i$.

(c) Integrale generale dell'omogenea associata: $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

(d) Soluzione particolare (polinomio di II grado in x, essendo il coeff. di y diverso da 0): $\overline{y}(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$.

(e) Integrale generale: $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ con c_1, c_2 variabili in $\mathbb{R}$.

16. $y'' - 4y = x + e^{2x}$ è equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea, a coefficienti costanti.

(a) Equazione omogenea associata: $y'' - 4y = 0$.

(b) Soluzioni dell'equazione caratteristica ($r^2 - 4 = 0$): $r_1 = -2$, $r_2 = 2$.

(c) Integrale generale dell'omogenea associata: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ con c_1, $c_2$variabili in $\mathbb{R}$.

(d) Soluzione particolare (vedi punto (f)): $\overline{y}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}xe^{2x}$.

(e) Integrale generale: $y(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}xe^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ con c_1, c_2 variabili in $\mathbb{R}$.

(f) Se $z(x)$ è una soluzione particolare di $y'' - 4y = x$ e $w(x)$ è una soluzione particolare di $y'' - 4y = e^{2x}$ si ha $z'' - 4z + w'' - 4w = x + e^{2x}$, cioè $(z+w)'' - 4(z+w) = x + e^{2x}$, vale a dire $z(x) + w(x)$ è una soluzione particolare di $y'' - 4y = x + e^{2x}$. Risulta $z(x) = -\frac{1}{4}x$. Inoltre se $w(x) = c(x)e^{2x}$ si ha $w'(x) = [c'(x) + 2c(x)]e^{2x}$ e $w''(x) = [c''(x) + 4c'(x) + 4c(x)]e^{2x}$ e sostituendo: $[c''(x) + 4c'(x)]e^{2x} = e^{2x}$. Si può porre $4c'(x) = 1$ (cioè $c'(x) = \frac{1}{4}$ e $c''(x) = 0$): quindi $w(x) = \frac{1}{4}xe^{2x}$.

Sol. Ex.3

1. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + 10y = 1 \\ y(0.1) = 0.2 \end{cases}$ ha una e una sola soluzione, poiché l'equazione differenziale in esame è lineare del I ordine.

(a) Integrale generale dell'omogenea associata ($y' + 10y = 0$): $y(x) = ke^{-10x}$ con k variabile in $\mathbb{R}$.

(b) Soluzione particolare: $\overline{y}(x) = e^{-10x} \int e^{10x} dx = \frac{1}{10}$.

(c) Integrale generale: $y(x) = \frac{1}{10} + ke^{-10x}$

(d) Affinché sia $y\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2}{10}$ deve essere $\frac{1}{10} + ke^{-10 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{2}{10}$ cioè $ke^{-1} = \frac{1}{10}$.

(e) Soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}e^{1-10x}$.

2. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + (\cos x)\, y = 2xe^{-\sin x} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ ha una e una sola soluzione, poiché l'equazione differenziale in esame è lineare del I ordine.

   (a) Integrale generale dell'omogenea associata $(y' + (\cos x)\, y = 0)$: $y(x) = ke^{-\sin x}$ con k variabile in $\mathbb{R}$.
   (b) Soluzione particolare: $\overline{y}(x) = e^{-\sin x} \int \left(2xe^{-\sin x}\right) e^{\sin x} dx = x^2 e^{-\sin x}$.
   (c) Integrale generale: $y(x) = \left(x^2 + k\right) e^{-\sin x}$.
   (d) Affinché sia $y(\pi) = 0$ deve essere $\pi^2 + k = 0$ cioè $k = -\pi^2$.
   (e) Soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = \left(x^2 - \pi^2\right) e^{-\sin x}$.

3. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$ ha una e una sola soluzione, poiché l'equazione differenziale in esame è lineare del II ordine (omogenea).

   (a) Soluzione dell'equazione caratteristica $(r^2 + 10r + 25 = 0)$: $r = -5$
   (b) Integrale generale : $y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$ con c_1, c_2 variabili in $\mathbb{R}$.
   (c) Sua derivata: $y'(x) = (-5c_1 + c_2 - 5c_2 x)\, e^{-5x}$
   (d) Affinché sia $y(1) = 0$ e $y'(1) = 2$ deve essere $\begin{cases} (c_1 + c_2)\, e^{-5} = 0 \\ (-5c_1 - 4c_2)\, e^{-5} = 2 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2 = 2e^5 \end{cases}$.
   (e) Soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = 2e^{5-5x}(x - 1)$.

4. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = 1 \end{cases}$ ha una e una sola soluzione, poiché l'equazione differenziale in esame è lineare del II ordine (omogenea).

   (a) Soluzione dell'equazione caratteristica $(r^2 + r + 1 = 0)$: $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
   (b) Integrale generale: $y(x) = e^{-x/2} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right]$ con c_1, c_2 variabili in $\mathbb{R}$.
   (c) Sua derivata: $y'(x) = e^{-x/2} \left[\left(\frac{c_2\sqrt{3} - c_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \left(\frac{c_2 + c_1\sqrt{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right]$
   (d) Affinché sia $\begin{cases} y\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = 1 \end{cases}$ deve essere $\begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-\pi/\sqrt{3}} = 1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{-2}{\sqrt{3}} e^{\pi/\sqrt{3}} \end{cases}$.
   (e) Soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = -\frac{2e^{(\pi/\sqrt{3}) - (x/2)}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.