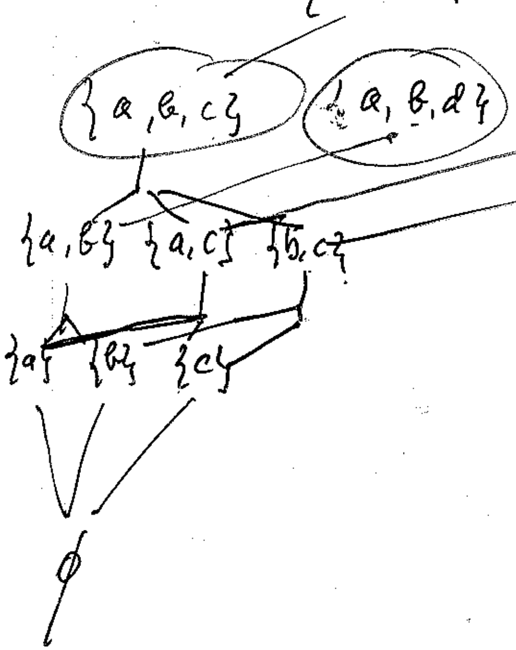
$\{a, b, c, d\}$



Relazione d'ordine tra i sottoinsiemi di un insieme

$A \subseteq A$

$A \subseteq B \quad B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$A \subseteq B \quad B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$\{a\} \subseteq \{a, b\} \qquad \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

$\Rightarrow \{a\} \subseteq \{a, b, c\}$

è una rel d'ordine

qui non c'è un ordinamento TOTALE

RIPRESA SUGLI ORDINAMENTI

effetto della compatibilità dell'ordinamento con le operazioni

A)

$x + 2 \geq 0$

$x + 2 - 2 \geq 0 - 2$

$x \geq -2$

$a \leq b \iff a - b \leq 0 \iff b - a \geq 0$

? $c > 0$: $c(b-a) \geq 0 \iff cb \geq ca$

$\iff ca \leq cb$

? $c < 0$

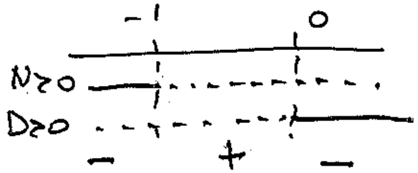
B)

$\frac{x-1}{x} > 2 \iff \frac{x-1}{x} - 2 > 0$

$\iff \frac{x - 1 - 2x}{x} > 0 \iff \frac{-x-1}{x} > 0$

$-x - 1 > 0 \iff x < -1$

$x > 0 \iff x > 0$



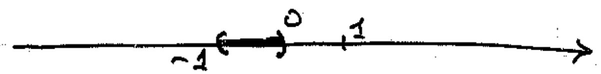
le soluzioni sono gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$-1 < x < 0$

intervallo aperto

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0)$

$] \quad [$



$[\quad]$

TERMINOLOGIA

Tra i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ alcuni rivestono particolare importanza ... tanto da meritare un nome

intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\} =: (a,b) =:]a,b[$$

intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme

$$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\} =: [a,b]$$

intervallo semiaperto a sinistra ...

$$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\} =: (a,b]$$

intervallo semiaperto a destra ....

$$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\} =: [a,b)$$

Per analogia, anche gli insiemi

$$\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\} =: (-\infty,a)$$
$$\{x\in\mathbb{R} \mid x\le a\} =: (-\infty,a]$$
$$\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\} =: (a,+\infty)$$
$$\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\} =: [a,+\infty)$$

saranno detti talora intervalli (illimitati).

Ogni intervallo aperto limitato contenente un numero x_0 sarà detto intorno di x_0. L'intervallo aperto limitato

$$U(x_0)=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<r\}$$

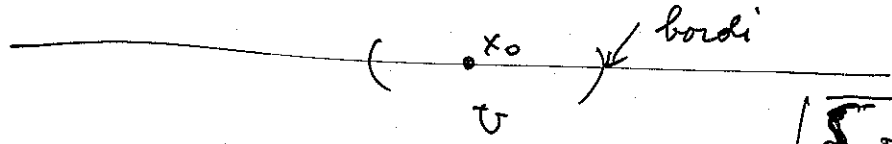
sarà detto intorno (di x_0) centrato in x_0 e di semi ampiezza r.

Un numero x_0 sarà detto punto di accumulazione per un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di x_0 c'è almeno 1 elem. di A. Ad es. $x_0=a$ è punto di accumulazione per $A=(a,b)$.

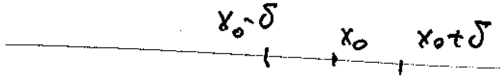
NO $\boxed{-\infty<x<a}$ NO

NON HA SENSO

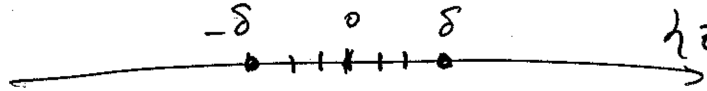
$(x_0, a) \not\ni x_0$ $(a, x_0) \not\ni x_0$



$\boxed{\delta}$ DELTA $\delta>0$



$$U(x_0) = (x_0-\delta,\ x_0+\delta) =$$
$$= \{x\in\mathbb{R} \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\} =$$
$$= \{x\in\mathbb{R} \mid -\delta < \underbrace{x-x_0}_{z} < \delta\}$$

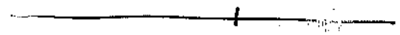


$\{z\in\mathbb{R} \mid |z|<\delta\}$

PROMEMORIA

DEF: $|z| = \begin{cases} z & \text{se } z\ge 0 \\ -z & \text{se } z<0 \end{cases}$

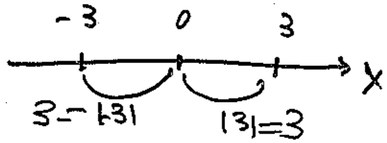
$|z|<\delta$



$|z|=3$

$z=3$

$z=-3$



Osservazioni sul VALORE ASSOLUTO

a) $-|x| \le x \le |x|$

b) $|x| < a$ (con $a>0$) significa $0 \le x < a \vee 0 < -x < a$ $\Updownarrow$ $0 \le x < a \vee -a < x < 0$

$-a < x < a$

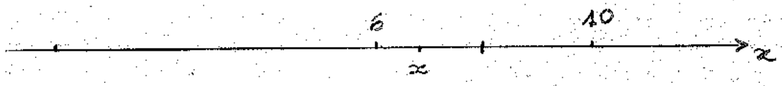
o anche:

la distanza del punto di ascissa x da 0 è inferiore ad a.

ESEMPI

1) x è più distante da 10 che da 6, significa

$$|x-10| > |x-6|$$



Le soluzioni sono date da $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$. Perché?

$x \le 6$: $10-x > 6-x$ sempre

$6 < x \le 10$: $10-x > x-6$: $6 < x < 8$ $\Big\}$ $x < 8$

$x > 10$: $x-10 > x-6$: mai

2) x ha distanza 5 da 3 significa $|x-3| = 5$

3) x è compreso strettamente tra 15 e 23

si può rileggere $\left(\frac{15+23}{2} = 19 \quad , \quad 19-15 = 4\right)$

$$|x-19| < 4$$

c) $||x|-|y|| \le |x+y| \le |x|+|y|$

$\Updownarrow$ $\hookrightarrow$ banale via (a), (b)

$-|x+y| \le |x|-|y| \le |x+y|$

$\Updownarrow$

$|y| \le |x| + |x+y| \quad \wedge \quad |x| \le |y| + |x+y|$

$$\{x \mid |x-5| = 3\}$$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x-5 \ge 0 \\ -(x-5) & \text{se } x-5 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-5 & \text{se } x \ge 5 \\ 5-x & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5 = 3 & \text{se } x \ge 5 & x = 8 \\ 5-x = 3 & \text{se } x \le 5 & x = 2 \end{cases}$$

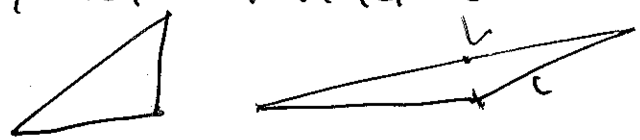
quindi

$|x-5| < 3 \iff 2 < x < 8$ o MEGLIO

$x \in (2, 8)$

$$||x|-|y|| \le |x+y| \le |x|+|y|$$

$1 = |-1+2| < |-1| + |2| = 3$



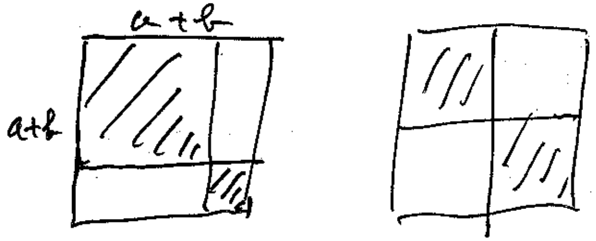
$3 = |1+2| = |1| + |2|$

$3 = |-1-2| = |-1| + |-2|$

5

$x^2+1 \ge 1$ (≥ 0)

$(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab$



Siano dati $\frac{3}{17}$ e $\frac{24}{5}$. Trovare un numero ~~finito~~ tra i due

Ad es.: 2

$\frac{3}{17}$ $\frac{5}{31}$ $\qquad \dfrac{\frac{3}{17}+\frac{5}{31}}{2} = ?$

$\frac{5}{31} < \frac{3+5}{17+31} < \frac{3}{17} \qquad \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{31} < \frac{1}{6} = \frac{5}{30} \qquad \frac{3}{18} = \frac{1}{6} < \frac{3}{17}$

Costruzione di numeri che descrivono la proprietà di densità su esempi particolari

6

Controesempio | i numeri razionali non sono completi

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x>0 \text{ e } x^2 \le 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x>0 \text{ e } x^2 > 2\}$

$a < b$:

Infatti se $a \in A$ e $b \in B$ e $a \ge b > 0$

allora $2 \ge a^2 \ge b^2 > 2$ non può essere vera la serie di disuguaglianze.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0 \text{ e } x^2 \le 2\} = (0, \sqrt{2}]$

Quindi A e B sono separati

esiste $\frac{p}{q}$ t.c. $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$?

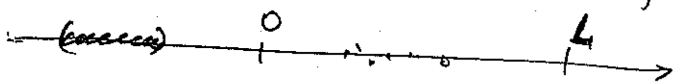
$0 < a \le \frac{p}{q} \le b$

$a^2 \le \frac{p^2}{q^2} \le b^2$

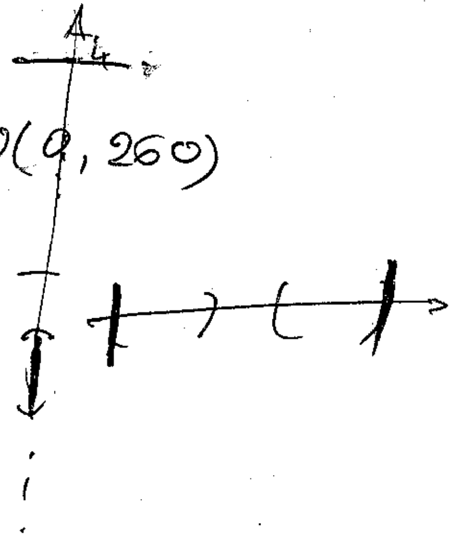
$2 \le \frac{p^2}{q^2} \le 2$

NO perché non esistono razionali il cui quadrato dà 2.

Estremi superiori e inferiori



$F(215, 13) \cup (253, 260) \subseteq U(0, 260)$



$\operatorname{Inf} F = -215$

$\operatorname{Sup} F = 260$

$\{x \in \mathbb{R} \mid -215 < x < 13\}$

$= (-215, 13) = E \qquad 13 = \operatorname{Sup} E$

$\forall x \in E$ si ha $x \leq 13$? Sì

13 è un maggiorante di E

se y è tale che $\forall x \in E$ si ha $x \leq y$ è vero che $y \geq 13$?

y — 13, > 13 Sì

13 è il più piccolo dei maggioranti

$\Longrightarrow 13 = \operatorname{Sup} E$

Controesempio su $\mathbb{Q}$.

Perché ALMENO 1 ?

Condizione equivalente? DEFINIZIONI

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto limitato se esistono $l, L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad l \leq x \leq L$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto superiormente limitato se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad x \leq L$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto inferiormente limitato se esiste $l \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad l \leq x$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo superiore $\operatorname{Sup} E$ se $\exists\, S = \operatorname{Sup} E \mid \forall x \in E$ risulta $x \leq \operatorname{Sup} E$ e $\forall y \in \mathbb{R}\ \{$t.c. $\forall x \in E$ risulti $x \leq y\} \Rightarrow \operatorname{Sup} E \leq y$
- $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo inferiore $\operatorname{Inf} E$ se $\exists\, I = \operatorname{Inf} E \mid \forall x \in E$ risulta $I \leq x$ e $\forall y \in \mathbb{R}$ t.c. $\{\forall x \in E$ risulti $y \leq x\} \Rightarrow y \leq I$
- M massimo di E
  Se esiste $\operatorname{Sup} E$ e $\operatorname{Sup} E \in E$ dico che $\operatorname{Sup} E$ è il massimo di E
- m minimo di E.
  Se $\operatorname{Inf} E$ esiste ed $\operatorname{Inf} E \in E$ dico che $\operatorname{Inf} E$ è il minimo di E