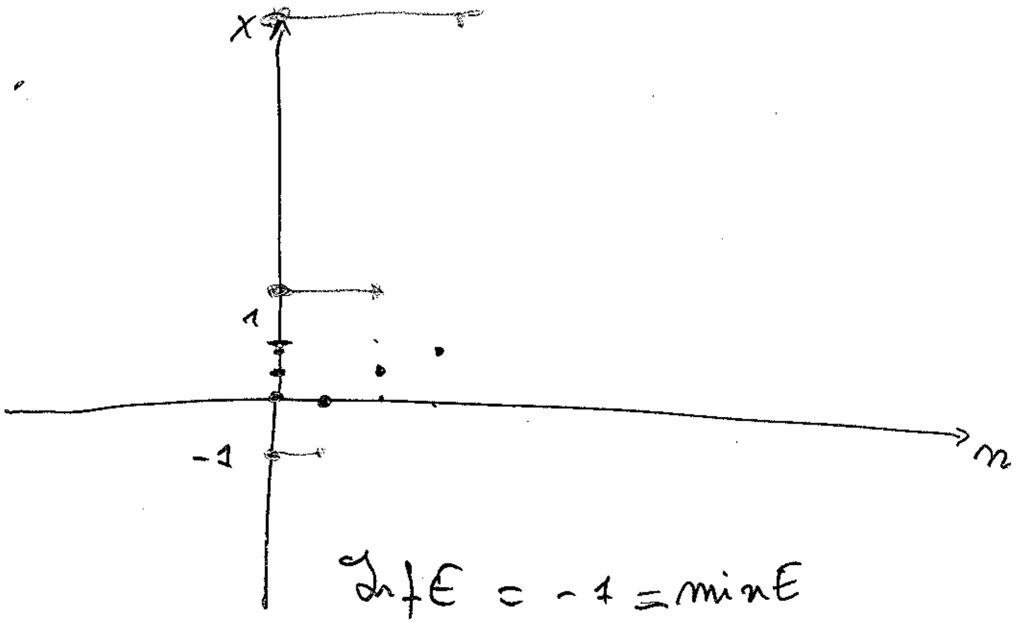
$E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \} \cup$

$\cup \{ x \in \mathbb{R} \mid x = n^2 - 2, \ \text{con } n \in \mathbb{N} \}$



$\inf E = -1 = \min E$

$\sup E$ non esiste $(= +\infty)$

ultima slide del 19/10

ESEMPI su estremi superiori e inferiori

$E = [1, 3)$

$E = \mathbb{N}$

$E = \mathbb{Z}$

$E = \{ \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \}$

$E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8 \}$

TEOR. dell'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE).

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato allora E ammette estremo superiore

questa condizione (ogni s.i. superiormente limitato ha estremo superiore) EQUIVALE alla COMPLETEZZA

Permette di dire che in $\mathbb{R}$ esiste $\sqrt{2}$ e più in generale che

(ESISTENZA DELLE RADICI n-ESIME ARITMETICHE)

$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$ e $\forall n \geq 1$ esiste 1 e 1 sol numero reale positivo x t.c.

$$x^n = y$$

x viene denotato con $\sqrt[n]{y}$

$(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ è un insieme completo perché

scelti comunque due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}$ che siano SEPARATI cioè

$$\forall a\in A,\ \forall b\in B:\ a\leq b$$

esiste un elemento SEPARATORE $c\in\mathbb{R}$ che è tale che

$$\forall a\in A,\ \forall b\in B \text{ risulti } a\leq c\leq b$$

$A=(1,2]$ $B=[2,3)$ sono separati

ma $\exists$ un elemento $\underset{b}{\overset{}{a}}\in A\cap B$: $a=b=2$

e quindi l'elem. separatore è $\boxed{c=2}$

Dim. Teor. dell'estremo superiore.

$E\subseteq\mathbb{R}$

E è superiormente limitato cioè $\exists L\in\mathbb{R}$ t.c. $\forall x\in E$ risulta $x\leq L$

$A=E$ $B'=\{b\in\mathbb{R},\ b>L\}$

$\forall a\in A=E$ si ha $a\leq L<b$

cioè gli insiemi sono separati

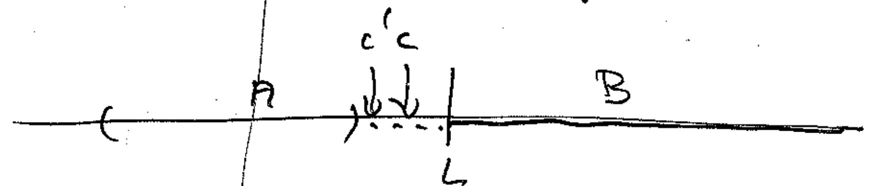
$\Rightarrow$ esiste un c t.c. $\forall a\in A,\ \forall b\in B'$ si abbia $a\leq c\leq b$

potrebbe non essere il piccolo dei maggioranti

(1) (2)

$A=E$ $B=\{b\in\mathbb{R}\ |\ b>a\ \forall a\in A\}\neq\emptyset$

non è vuoto perché B contiene B'



A e B sono separati $\Rightarrow \exists c$ separatore

$\forall a\in A$ $\forall b\in B$: $a\leq c\leq b$

Quindi c è un maggiorante di A ed è il + piccolo dei maggioranti perché

c.v.d.

---

a che cosa serve la completezza?

RADICALI

$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ $\qquad a\cdot a^{-1}=a^{1+(-1)}=a^0=1$

PER DEFINIZIONE

$$a^{-n}=(a^{-1})^n=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n} \qquad n\in\mathbb{N}$$

ORA

CI INVENTIAMO LE POTENZE CON ESPONENTE FRAZIONARIO

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^1$$

Commento

$$a^{xn} = (a^x)^n = a^1 \quad \Rightarrow \quad xn = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE CON ESPONENTE NATURALE

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Commento

risvolto antipatico della definizione di $a^{\frac{m}{n}}$:

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \qquad x^3 = -27 = (-3)^3$$

$(-27)^{1/3} = ^{2/6}$ non esiste

$$\parallel$$

$$(-27)^{2/6} = \Big(\underbrace{(-27)^{1/6}}_{\text{non c'è}}\Big)^2$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = (-27)^{-1/3} \qquad x^{-1/3} = x^{-2/6} = (x^{1/6})^{-2}$$

$x^{p/q}$ $\quad p/q \in \mathbb{Q}$ $\quad$ è definita se e solo se $\boxed{x \text{ è positivo}}$

R8

Potenze con esponente razionale:

$$\sqrt[n]{a} =: a^{1/n} \qquad (a \geq 0 \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

Di qui

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(a \geq 0 \quad \frac{m}{n} > 0\right)$$
$$= (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Se voglio $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, qualsiasi devo chiedere

$$a > 0.$$

Potenze con esponente reale (base $a > 0$)

Definite "per approssimazione"....

Es. $2^{\sqrt{2}}$? $\quad$ VEDERE SLIDE SUCCESSIVA

PROPRIETÀ

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$; $\forall c, d \in \mathbb{R}$:

- $a^0 = 1 \quad \forall a \quad ; \quad 1^c = 1 \quad \forall c$
- $\Rightarrow$ $a^c \cdot a^d = a^{c+d}$
- $\Rightarrow$ $a^c \cdot b^c = (ab)^c$
- $\Rightarrow$ $(a^c)^d = a^{cd}$
- $a^c > 0$
- se $c > 0$: $a > 1 \Rightarrow a^c > 1$
  $0 < a < 1 \Rightarrow a^c < 1$

  se $c < 0$: si scambia $\quad$ VEDERE SLIDE SUCCESSIVA

$2^{\sqrt{2}}$?

$\sqrt{2}$

	appross. x difetto		appross. x eccesso
A	1	B	2
	1.4		1.5
	1.41		1.42
	1.414		1.415
	1.4142		1.4143
	⋮		⋮

$A = \{2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, \dots \}$

$B = \{2^2, 2^{1.5}, 2^{1.42}, \dots \}$

$$\left(\sqrt[100]{2}\right)^{141} = 2^{1.41} < 2^{1.42} = \left(\sqrt[100]{2}\right)^{142}$$

$\forall a \in A$
$\forall b \in B$ $\quad a < b$

$\Longrightarrow$ $2^{\sqrt{2}}$ è l'elem. separatore di A e B o se si preferisce

$\mathrm{Sup}\, A = \mathrm{Inf}\, B$

$c<0 \qquad c = -|c|$

$a>1 \qquad a^{|c|} > 1 \Rightarrow a^{-|c|} < 1$

$0<a<1 \qquad 0 < a^{|c|} < 1 \Rightarrow a^{-|c|} > 1$

$0<a<b \Rightarrow a^2 < b^2$

$a^2 < ab$
$ab < b^2$

$a^2 < \cancel{ab} < b^2$

Commento la * della SLIDE SUCCESSIVA

$c<0 \qquad c = -|c|$

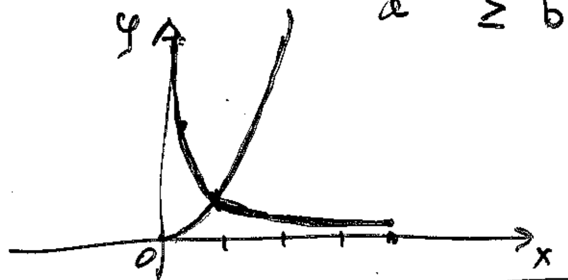
$0<a\le b \Rightarrow a^{|c|} \le b^{|c|}$

$a^{-|c|} \ge b^{-|c|}$

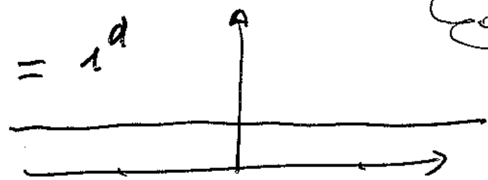
$\boxed{x>0}$

x^2

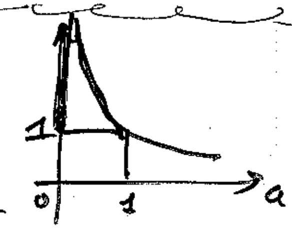
x^{-2}



$1^c = 1 = 1^d$



Commento la ** della slide successiva



$0<a<1 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 1$

$\boxed{c>d}$ $\quad \left(\frac{1}{a}\right)^c > \left(\frac{1}{a}\right)^d \Leftrightarrow \frac{1}{a^c} > \frac{1}{a^d} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a^d > a^c}$

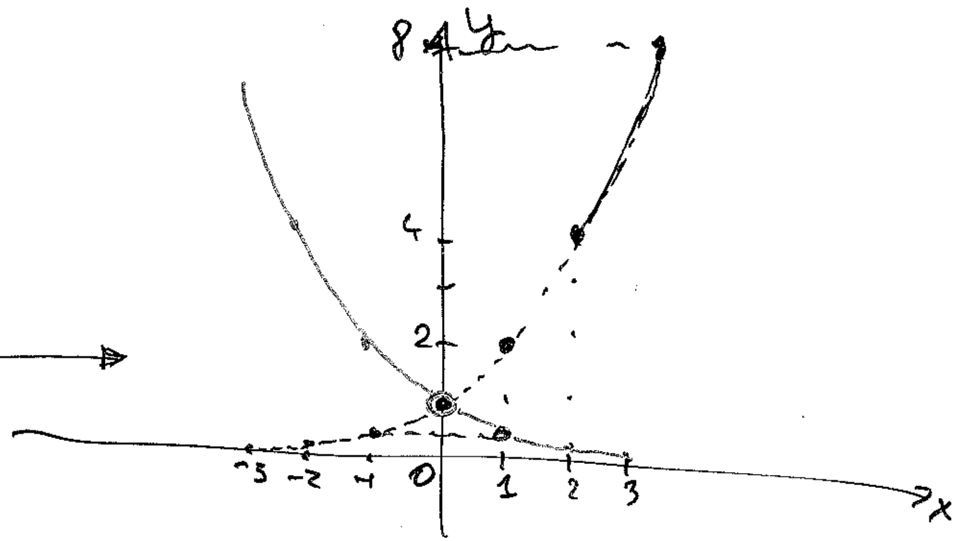
$\Rightarrow$ • se $c>0$: $0<a\leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$ *

se $c<0$: $\geq$ ← VEDI SLIDE PRECEDENTE

$\Rightarrow$ • se $c<d$: $a>1 \Rightarrow a^c < a^d$ **

$0<a<1 \Rightarrow a^c > a^d$ ← VEDI SLIDE PRECEDENTE E ALATO

Esempi.



2^x

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	2^x
1	0	1
1/2	1	2
1/4	2	4
	3	8
	-1	1/2
	-2	1/4
	-3	1/8

Risolvere le equazioni:

$x^2 = 10$; $x^4 = -1$; $x^3 = -7$

$x^{2/3} = 5$; $x^{\sqrt{2}} = 4$

Tutte queste sono equazioni del tipo

$$x^c = b$$

e abbiamo visto che: se $b>0$ sono risolubili in $\mathbb{R}$;

se $b<0$ ....

$x^{2/3} = 5$

$\left(x^{2/3}\right)^{3/2} = 5^{3/2} = 5\sqrt{5}$

$\parallel$

$x^1 = x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}$

$\parallel$

x

$x^{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow x = x^{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(x^{\sqrt{2}}\right)^{1/\sqrt{2}} = 4^{1/\sqrt{2}} = \left(4^{1/2}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$

*

$\left(x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$

$x^2 = 4^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2^{\sqrt{2}}$

commento alla risoluzione proposta da un collega che prevedeva la soluzione aggiuntiva $x = -2^{\sqrt{2}}$

Il problema di partenza $x^{\sqrt{2}} = 4$ è definito per $x \geq 0$

$x^a = b$ se $b > 0$
ha soluzione (che è per forza ≥ 0)
$x = b^{1/a}$

$a^x = b$

$a > 0$
$b > 0$

$1^x = 1$ se $a = 1$ < $b = 1$ $1^x = 1$: infinite sol.; $b \neq 1$ nessuna soluz.

Se $b > 0$ $0 < a < 1$ oppure $a > 1$ cioè
$b \in (0, +\infty)$ $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$
la soluzione esiste ed è detto log in base a di b

Altro tipo di equazione: $a^x = b$

Se $a = 1$: < è identità $1^x = 1$; è impossibile.

Se $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ e $b \leq 0$ ... NON CI SONO SOLUZ.

Se $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ e $b > 0$ l'equazione ammette una e una sola soluzione: essa si chiama LOGARITMO in BASE a di b:

$\log_a b$

$\boxed{a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^c = c}$

PROPRIETÀ

Sia: $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$ $x > 0, y > 0$

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
- $\log_a (x^c) = c \log_a x$
- $(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$ purché sia $x \neq 1$