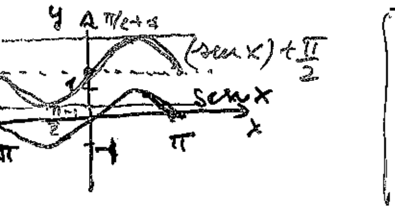
Comporre nei due versi e disegnare i grafici

$f(x) = \text{sen}\, x$ $\qquad$ $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$

$f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

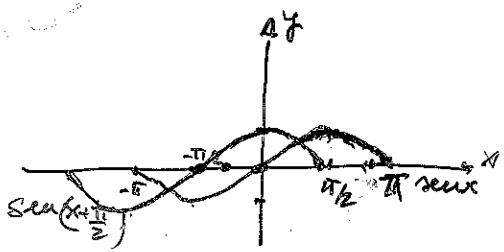
$g \circ f(x) = g(\text{sen}\, x) = \text{sen}\, x + \frac{\pi}{2}$



$f \circ g(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$x + \frac{\pi}{2} = 0$ quando?

$x = -\frac{\pi}{2}$



In generale componendo $f(x)$ con $T(x) = x + c$ ...

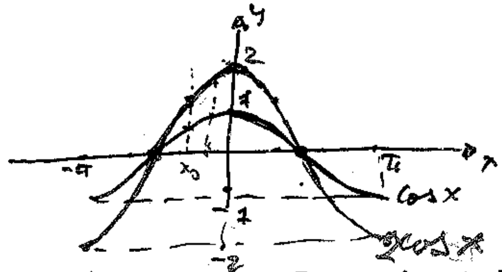
$T \circ f(x) = f(x) + c$: traslo il grafico di c nel verso positivo dell'asse y. Qui varia l'immagine (se è limitata)

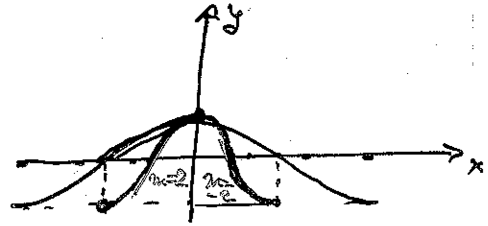
$f \circ T(x) = f(x+c)$: traslo il grafico di c nel verso negativo dell'asse x. Qui varia l'I.D. (se limitato)

Comporre nei due versi e disegnare i grafici

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $g(x) = 2x$

$g \circ f(x) = 2\cos x$ $\qquad$ $f \circ g(x) = \cos 2x$





$D(\cos x) = [-\pi, \pi] \Rightarrow D(2\cos x) = [-\pi, \pi]$ $\qquad$ $D(\cos x) = [-\pi, \pi]$ $\qquad$ $D(\cos 2x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

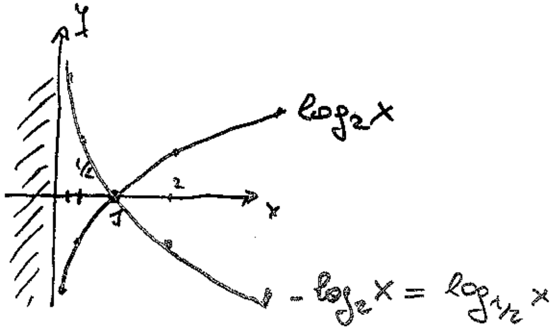
$Im(g \circ f) = [-2, 2]$ $\qquad$ $Im(f \circ g) = [-1, 1]$

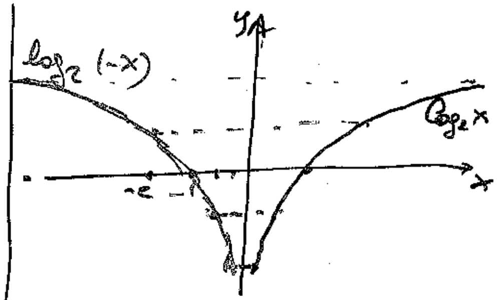
In generale componendo $f(x)$ con $d(x) = ax$ ....

$d \circ f(x) = a f(x)$: dilato il grafico di un fattore a nella direzione dell'asse y

$f \circ d(x) = f(ax)$: dilato il grafico di un fattore $\frac{1}{a}$ nella direzione dell'asse x

Disegnare il grafico di $\log_2(-x)$ e quello di $-\log_2 x$. Che cosa si può dire dei loro ID?





I.D.$(\log_2 x) = (0,+\infty)$ $\Rightarrow$
I.D.$(-\log_2 x) = (0,+\infty)$
$\mathcal{I}(\log_2 x) = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}(-\log_2 x) = \mathbb{R}$

I.D.$(\log_2 x) = (0,+\infty)$
I.D.$(\log_2(-x)) = (-\infty,0)$
$\mathcal{I}(\log_2 x) = \mathcal{I}(\log_2(-x)) = \mathbb{R}$

Si considerino $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \log_2(-x)$

Si può comporre $g \circ f$?

$\mathcal{I}(f) = [0,+\infty)$
I.D.$(g) = (-\infty, 0)$

$\mathcal{I}(f) \cap$ I.D.$(g) = \emptyset$ $\Rightarrow$ non ha senso

controprova: scrivo
$g \circ f(x) = \log_2(-\sqrt{x})$: non è mai definito

E $f \circ g$?

$\mathcal{I}(g) = \mathbb{R}$
I.D.$(f) = [0,+\infty)$

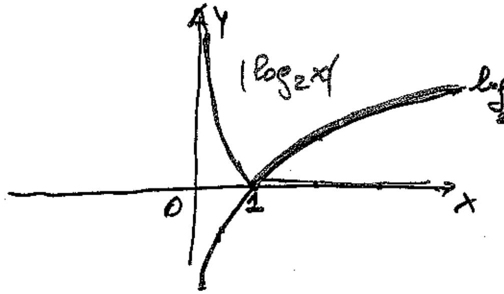
$\mathcal{I}(g) \cap$ I.D.$(f) = [0,+\infty)$

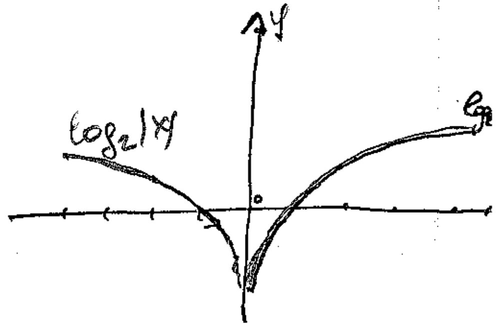
infatti I.D.$(\sqrt{\log_2(-x)}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \geq 1\}$

Restrizioni necessarie:
vado a considerare la funz.
$g(x) = \log_2(-x)$ ristretta al dominio $(-\infty, -1]$

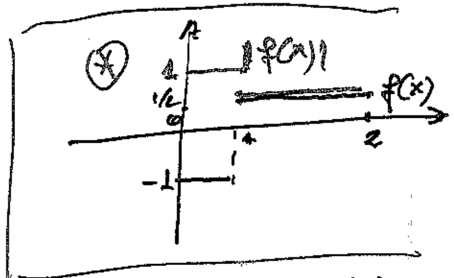
$A \xrightarrow{f} B$
$B \xrightarrow{g} C$
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
se $A \neq C$ non ha senso $f \circ g$

Disegnare il grafico di $\log_2|x|$ e quello di $|\log_2 x|$ ..





$|\log_2 x| = \begin{cases} \text{se } \log_2 x \geq 0 : \log_2 x \\ \text{se } \log_2 x < 0 : -\log_2 x \end{cases}$



In generale come varia rispetto a quello di $f(x)$ il grafico di $f(|x|)$? e quello di $|f(x)|$? E i loro ID e immagini?

il grafico di $f(|x|)$ è l'unione del grafico di $f(x)$ e di quello di $f(-x)$ (simmetrico del precedente rispetto all'asse y) $\Rightarrow$ I.D. viene simmetrizzato rispetto all'origine; $\mathcal{I} f(|x|) = \mathcal{I} f(x)$

Il grafico di $|f(x)|$ è ottenuto ribaltando rispetto all'asse x le parti negative del grafico di $f(x)$ $\Rightarrow$ I.D.$|f(x)|$ = I.D.$(f(x))$ e $\mathcal{I}|f(x)|$ è contenuta(*) in $[0,+\infty)$

Che cosa succede componendo $g \circ f$ con

$f:(a,b) \to (c,d)$, $g:(c,d) \to \mathbb{R}$

I) Se in (a,b) f è crescente e in (c,d) g è cresc.?

$g \circ f$ è crescente in (a,b) perché:

$\boxed{\forall x_1, x_2 \in (a,b)}$ se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ (f cresc.)

$f(x_1), f(x_2) \in (c,d)$: poiché g è crescente in (c,d)

$\boxed{g \circ f(x_1)} = g(f(x_1)) \boxed{<} g(f(x_2)) = \boxed{g \circ f(x_2)}$

II) se in (a,b) f ~~cresc.~~ decr. e in (c,d) g ... ~~decr.~~ cresc.?

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$

$g \circ f(x_1) > g \circ f(x_2)$ $g \circ f$ è decresc. in (a,b)

III) se in (a,b) f cresc. e in (c,d) g ... decr.?

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$

$g \circ f(x_1) > g \circ f(x_2)$ $g \circ f$ è decr. in (a,b)

IV) se in (a,b) f decr. e in (c,d) g decresc...?

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$

f decresc: $f(x_1) > f(x_2)$

g decresc.: $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ cioè

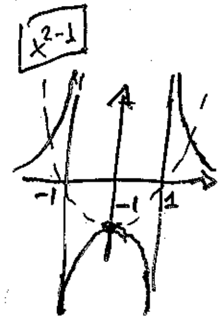
$g \circ f(x_1) < g \circ f(x_2) \Rightarrow g \circ f$ cresc. in (a,b)

Scomporre e dire su quali intervalli sono monotone:

$\frac{1}{x^2-1}$

I.D. $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ della composta

$x \xmapsto{(\ )^2} x^2 \xmapsto{(\ )-1} x^2-1 \xmapsto{1/(\ )} \frac{1}{x^2-1}$



la funz. data è comp. di 3 funzioni

$f(x) = x^2$

$g(y) = y-1$ cresc. e ho considerato $(h \circ (g \circ f))$

$h(z) = 1/z$

f è decresc. in $(-\infty,0)$ e cresc. in $(0,+\infty)$

$g \circ f$ è decresc. in $(-\infty,0)$ cresc. in $(0,+\infty)$

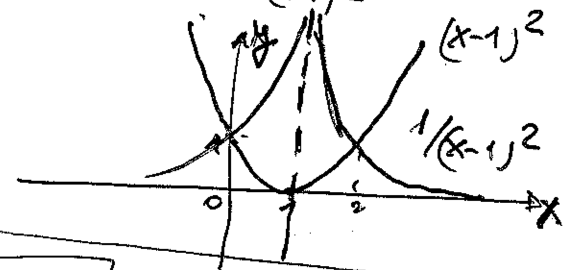
h decresce in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$

$h \circ g \circ f$ ~~tra~~ $(-1,0)$ cresc. tra 0 e 1 decr.

$(-\infty,-1)$ cresc. in $(1,+\infty)$ decr.

$\frac{1}{(x-1)^2}$

$x \xmapsto{(\ )-1} x-1 \xmapsto{(\ )^2} (x-1)^2 \xmapsto{1/(\ )} \frac{1}{(x-1)^2}$



$\frac{1}{x^3+3x+2}$

$x \xmapsto{f} x^3+3x \xrightarrow{(\ )+2} x^3+3x+2 \xmapsto{1/(\ )} \frac{1}{x^3+3x+2}$

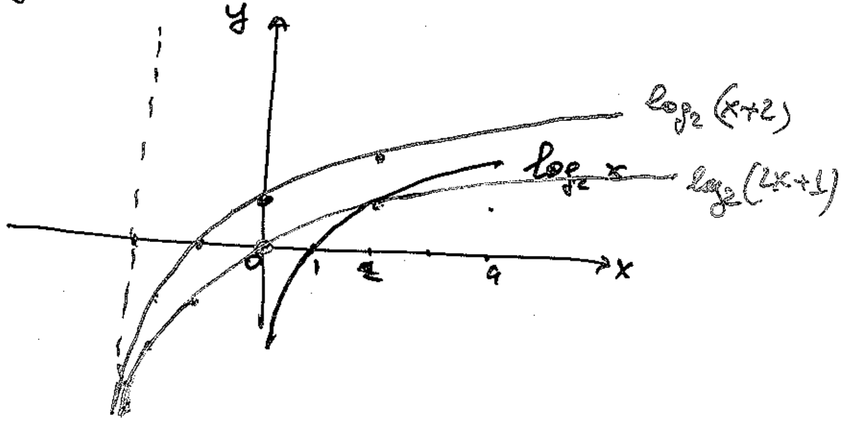
Abbastanza inutile

Disegnare il grafico di $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{2}x+1\right)$
dopo averla scomposta opportunamente

$$x \xmapsto{(\,)+2} x+2 \xmapsto{\frac{1}{2}(\,)} \frac{1}{2}x+1 \xrightarrow{\log_2} f(x)$$

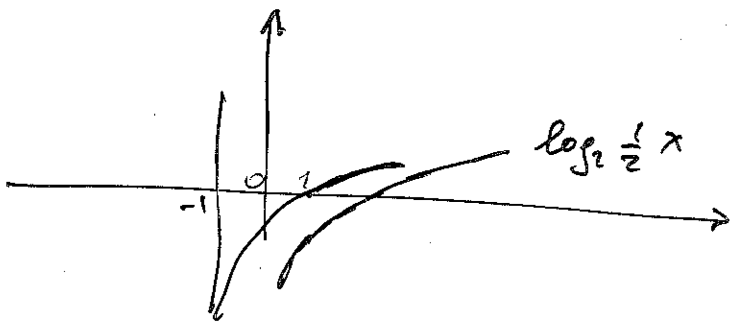
$$\log_2\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \log_2 \frac{1}{2}\cdot(x+2) = \log_2\frac{1}{2} + \log_2(x+2) =$$

$$= \log_2(x+2) - 1$$



Errore frequente

$$x \longmapsto \frac{1}{2}x \longmapsto \frac{1}{2}x+1 \longmapsto \log_2\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$



ma questo grafico non passa per $(0,0)$ come fa il grafico di $\log_2\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI

Vedi ESEMPI 8 – 11 BIS

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$

$g : B \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$g\circ f : A \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$

$g\circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Se $C \neq A$, $f\circ g$ è un NONSENSO

Se $C = A$ può essere $f\circ g \neq g\circ f$

ESEMPIO: $f(x) = |x| \qquad g(x) = x+1$

Se $C = A$ e $\begin{cases} g\circ f(x) = x & \forall x \in A \\ f\circ g(y) = y & \forall y \in B \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

si dice che f è invertibile e che g è la sua inversa
(NOTAZIONE: $g =: f^{-1}$)

ESEMPI

$f(x) = x^2$, $A = [0,+\infty)$ $B =$, $f^{-1}(y) =$

$A = (-\infty, 0)$ $B =$, $f^{-1}(y) =$

$f(x) = x^3$