Mercoledì aula V2 ore 13.30

MATEMATICA ASSISTITA

Comporre

Scomporre $\xrightarrow{\text{uso}}$ inversione di funzioni composte

---

$f : A \longrightarrow B = f(A) \quad (A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R})$

$g : B \longrightarrow A$

Se $\quad g \circ f(x) = x \quad \forall x \in A$

$\qquad f \circ g(y) = y \quad \forall y\, B$

cioè $\left\{ \begin{array}{ll} A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B & g \circ f = id_A \\ A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B & f \circ g = id_B \end{array} \right.$

dico che f è una funz. invertibile e che g è l'inversa di f.

Scrivo

$$g = f^{-1}$$

Esempi: $\quad f(x) = x$ è invertibile e la sua inversa è $f^{-1}(y) = y$

$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\qquad\qquad\quad B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$g(y)$ t.c. $\quad g(f(x)) = x \quad$ cioè

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

allora mi basta prendere $g(y) = \dfrac{1}{y}$

[come trovo l'inverso "con le mani"?

$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto y \end{array} \ : \ f(x) = y \quad$ cerco di ricavare y in funzione di x

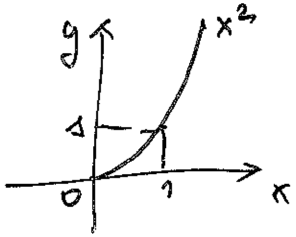
$$y = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{y} \ ]$$

Di fatto risolvere un'equazione significa applicare un certo numero di opportune funzioni inverse (definite su opportuni intervalli)

$f(x)=x^2$

se come dominio prendo $\mathbb{R}$
l'inversa non esiste

se considero come dominio $[0,+\infty)$



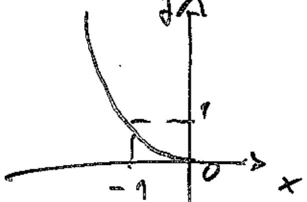
l'inversa esiste ed è
la funzione

$$x=\sqrt{y}$$

(con il segno + davanti $\sqrt{\ }$
perché voglio che $x\in[0,+\infty)$)

$$x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{x^2}=x \quad (x\in[0,+\infty))$$

se considero come dominio $(-\infty,0]$
allora l'inversa esiste ed ha
legge



$$x=-\sqrt{y}$$

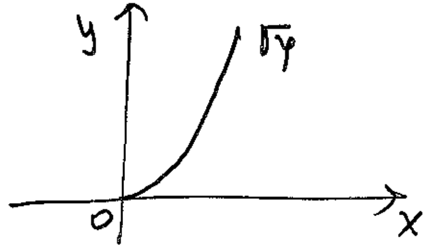
(con il segno − davanti $\sqrt{\ }$
perché voglio che $x\in(-\infty,0]$)

$$x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{-\sqrt{\ }} -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x$$

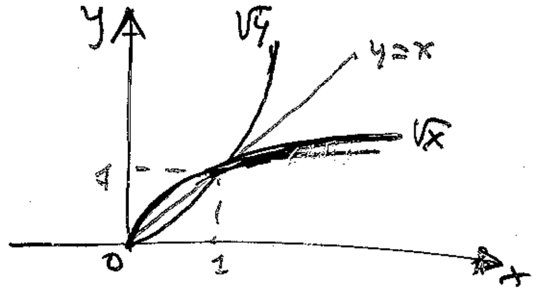
poiché $x\le 0$

Se voglio passare dalla rappresentazione
della funzione inversa

$x=\sqrt{y}$ (in generale $x=f^{-1}(y)$)



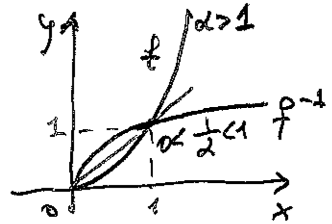
al grafico in cui la variab. indip.
si chiama x e quella dip. si chiama
y (e gli assi sono messi nella
posizione ordinaria) devo simme-
trizzare il grafico rispetto alla bisettri-
ce del 1°-3° quadrante

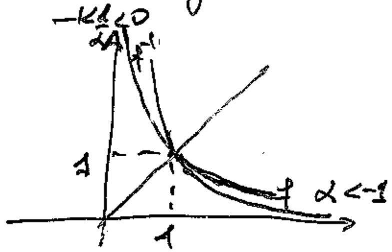


LE INVERSE ELEMENTARI

$f(x) = x^{\alpha}$ $A=(0,+\infty)$ $B=(0,+\infty)$

$y = x^{\alpha} \Rightarrow x = y^{1/\alpha}$



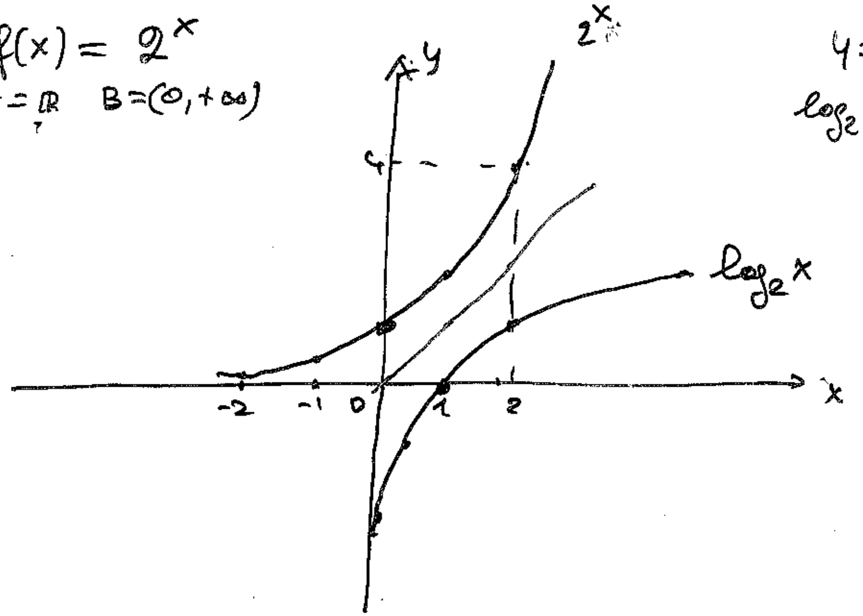


$f(x) = 2^x$

$A=\mathbb{R}$ $B=(0,+\infty)$

$y=2^x$

$\log_2 y = x$



$f(x)=a^x$ situazione analoga prestando attenzione al fatto che se $0<a<1$, a^x è decresc. e anche $\log_a x$ lo sarà

Inversione e biunivocità

Dimostrazione:

1) $f: A \to B$ invertibile. Mostro che è biunivoca

(IN) $x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$. Se $f(x_1) = f(x_2)$; applico f^{-1}

$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$ cioè $x_1 = x_2$ contro l'ip. iniziale

(SU) $\forall y \in B$ considero $x = f^{-1}(y)$. Risulta

$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$: ho trovato la x da cui proviene y

2) $f: A \to B$ biunivoca. Mostro che è possibile costruire l'inversa di f

$\forall y \in B$ $\exists x$ da cui y proviene (poiché f è suriettiva) e ne esiste 1 sola (poiché f è iniettiva). Allora posso def. la funz: $g(y) = x$. Si verifica subito che $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$

Inversione e monotonia

COND. SUFF. perché una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ sia invertibile è che sia STRETTAMENTE monotona

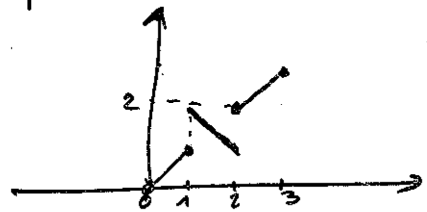
supponiamo $f: A \to B$ crescente ($A = (a,b)$)

$\forall x_1 \neq x_2$ $(x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow$ f è iniettiva; se restringo l'insieme di arrivo di f all'immagine ($B = f(A)$) la f. è biunivoca

Controesempio

non è vero che per essere invertibile f debba essere monotona



è biunivoca? sì

Come si trasmette

se $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ è monotona (de-)crescente

allora $f^{-1}: B \to (a,b)$ è " " (de-)

Sia f monotona crescente: allora f^{-1} lo è pure.

verifico: $y_1 < y_2$ $\quad y_1, y_2 \in B = (c, d)$

$y_1 = f(x_1) \qquad y_2 = f(x_2)$

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$

$f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$

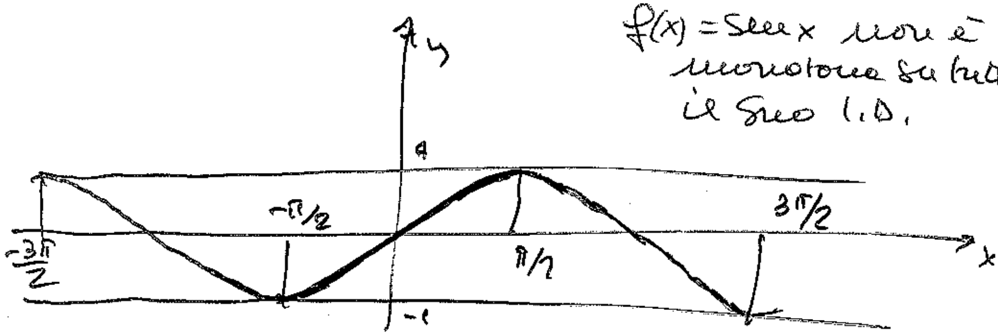
se $\quad f^{-1}(y_1) \not< f^{-1}(y_2)$

$x_1 \not< x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq x_2$

e quindi quando applico f risulta

$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ contro le ipotesi

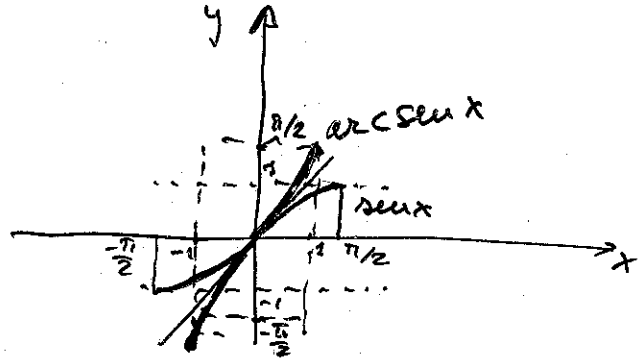
Quindi se f è monotona crescente, anche f^{-1} lo è



$f(x) = \operatorname{sen} x$ non è monotona su tutto il suo I.D.

Possiamo invertire in ogni intervallo in cui sia monotona ma di solito si sceglie di descrivere l'inversione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Chiamo tale funzione arcoseno e scrivo arcsen y.

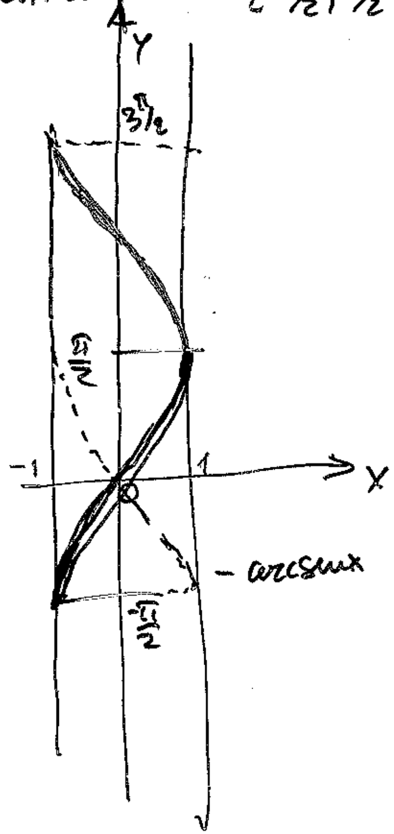
Grafico di arcsen x



arcsen : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
è crescente

se volessi invertire in $[\pi/2, \frac{3}{2}\pi]$?

$\pi -$ arcsen x



$f(x) = x^\alpha$ $\quad A =$ $\quad B =$

$f(x) = 2^x$ $\quad$ VEDI pagine precedenti

$f(x) = a^x$

$f(x) = \operatorname{sen} x$??

TEOREMA: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è BIUNIVOCA cioè

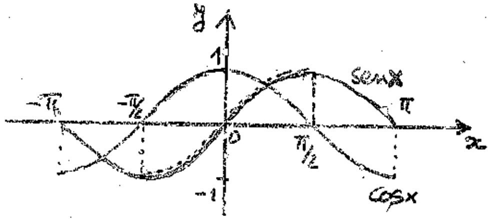
$\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (INIETT.)

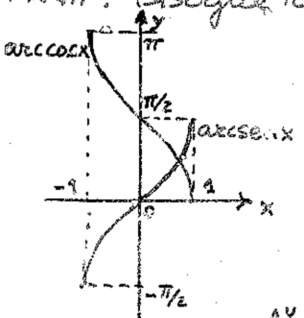
$\forall y \in B \Rightarrow \exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = y$ (SURIETT)

Tutte le funzioni trigonometriche sono periodiche:

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dunque l'inversione SI PAGA. Bisogna restringere il dominio

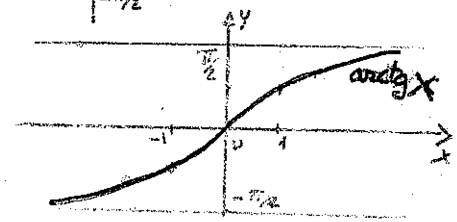




arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$

arcsen : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

arctg : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$



Risolvere:

① $2^x > 5$. Risolvo l'equazione

$2^x = 5$ $\quad$ Applico la funz. inversa $\log_2$ a entrambi i membri

$x = \log_2 2^x = \log_2 5$ $\quad$ Ora tengo conto che 2^x è crescente e quindi $\log_2 y$ è crescente. Dunque:

$2^x > 5$ $\quad$ applico $\log_2$

$x > \log_2 5$

② $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$ $\quad$ Tengo conto che $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ decresce. Dunque

$x < \log_{1/3} 5 = -\log_3 5$

→ PERSONALMENTE FAREI

$\frac{1}{3^x} > 5 \iff \frac{1}{5} > 3^x$ crescente

$\iff x < \log_3 \frac{1}{5} = -\log_3 5$

③ $\log_3 x < 1$ applico la funz. inversa 3^y (crescente)

$$x = 3^{\log_3 x} < 3^1 = 3$$

$$x < 3$$

$\log_{1/2} x < 4$ applico $\left(\frac{1}{2}\right)^y$ decrescente.

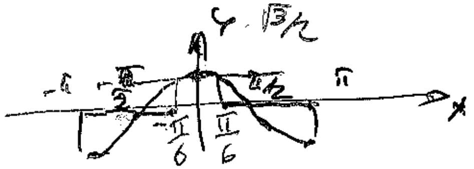
$$x > \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

---

④ $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, Risolvo l'equazione

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nell'intervallo $[0, \pi]$ trovo l'unica soluzione

$$x = \frac{\pi}{6}$$



nell'intervallo $(-\pi, 0)$

$$x = -\frac{\pi}{6}$$

e poi ci sono le soluz. ottenute aggiungendo multipli di 2π

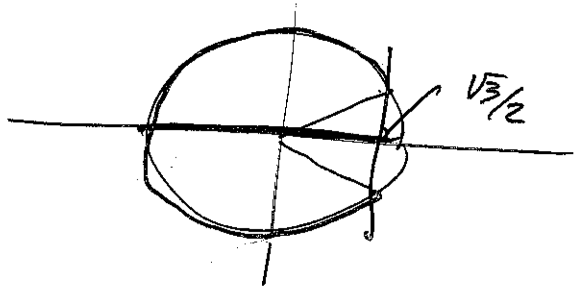
$\Rightarrow$ soluz. dell'eq. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

e la disequazione?

in $(-\pi, \pi]$ sull'unione di intervalli

$$\left(-\pi, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\pi/6, \pi\right]$$

Ma è più comodo, per tener conto dei periodi, usare la circonf. goniometrica



in $[0, 2\pi)$ le soluzioni hanno la forma

$$\left(\pi/6, 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

e, in generale, le soluzioni sono

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\pi/6 + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right)$$