Scomporre, trovare l'I.D. e dire dove è monotona

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}-1} \quad (-\infty,1)\cup(1,2] \quad \text{I.D.} \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ \sqrt{2-x}-1\neq 0 \end{cases} \begin{cases} x\leq 2 \\ \sqrt{2-x}\neq 1 \end{cases} \iff 2-x\neq 1 \iff x\neq 1$$

$$x \xmapsto{-()} -x \xmapsto{2+()} 2-x \xmapsto{\sqrt{\ }} \sqrt{2-x} \xmapsto{()-1} \sqrt{2-x}-1 \xmapsto{1/()} \frac{1}{\sqrt{2-x}-1} \xmapsto{4()} \frac{4}{\sqrt{2-x}-1}$$

Su $(-\infty,1)$

$2-x$ decresce, $\sqrt{\ }$ cresce $\}$ $\sqrt{2-x}$ decresce $\}$ $\sqrt{2-x}-1$ decresce

$()-1$ cresce

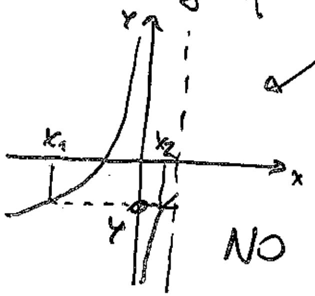
$\frac{1}{()}$ decresce $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-x}-1}$ cresce

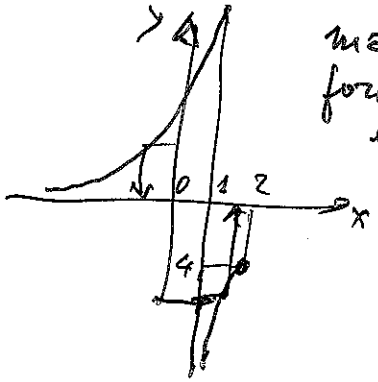
$4()$ cresce $\Rightarrow f(x)$ cresce

su $(1,2]$ $f(x)$ è crescente (stessa analisi)

È invertibile sull'ID? Se sì trovare l'inversa

se il grafico fosse:





ma per fortuna è questo!

$$y=\frac{4}{\sqrt{2-x}-1}$$

per calcolare l'inversa risolvo "in x"

$$\sqrt{2-x}-1=\frac{4}{y}$$

$$\sqrt{2-x}=1+\frac{4}{y} \geq 0$$

$$\begin{cases} 2-x=\left(1+\frac{4}{y}\right)^2 \\ 1+\frac{4}{y}\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2-\left(1+\frac{4}{y}\right)^2 \\ y\leq -4 \text{ o } y>0 \end{cases}$$

che cosa rappresenta la legge se $-4<y<0$?

SUCCESSIONI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

Successione: funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$n \longmapsto a_n$

Cioè anche: $\{a_0, a_1, \dots, a_n \dots\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$= \{a_n\}$

Esempi:

$\{n^2\} =$

$\{(-1)^n\} =$

$\{3^{1/n+1}\} =$

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} =$

graficamente (ATTENZIONE: DOMINIO $\mathbb{N}$)

La successione $\{a_n\}$ è detta

- SUPERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}$ è sup. limitato cioè $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \le L$.
- INFERIORMENTE LIMITATA se
  cioè $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\ell \le a_n$
- LIMITATA se inf e sup-limitata

VEDI ESEMPI PRECEDENTI

Commenti

1

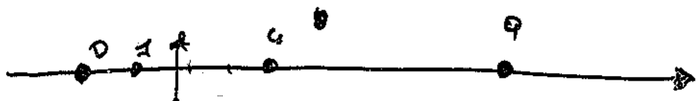
$\{n^2\} = \{0, 1, 2^2=4, 3^2=9, \dots, n^2, \dots\}$ non sup. limitata

$\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$ limitata min $=-1$ MAX

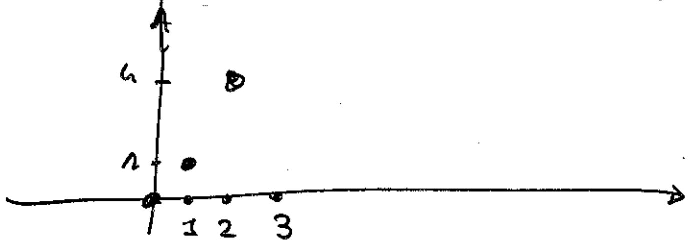
$\{3^{1/n+1}\} = \{3^1=3, 3^{1/2}, 3^{1/3}, \dots, 3^{1/n+1}, \dots\}$ limitata MAX $=3$ inf $=1$

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{-1}{1}=-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots, 1-\frac{2}{n+1}, \dots\right\}$

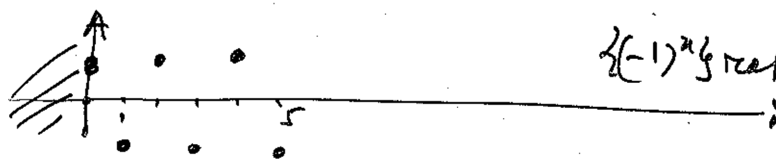
$n = \boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ limitata, minimo: -1 sup $=1$



$\{n^2\}$ rappresentata su 1 retta



Rappresentata nel piano



$\{(-1)^n\}$ rappr. nel piano

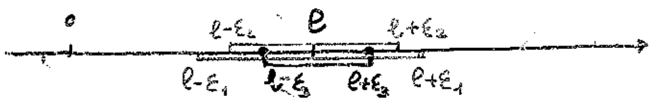
Successioni convergenti

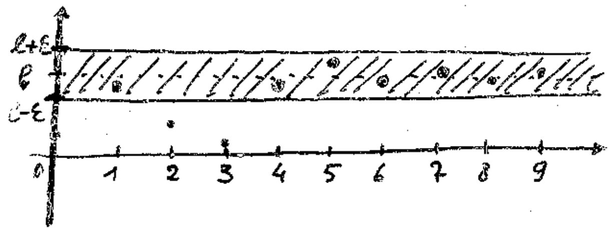
$\boxed{\{a_n\} \to l}$ la successione $\{a_n\}$ CONVERGE al numero reale l se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad t.c. \ \forall n \geq k : \ |a_n - l| < \varepsilon$$

Il limite se esiste è UNICO

Graficamente:





ES. $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \to 1$ perché

$\varepsilon = 1/10$

Successioni divergenti

$\boxed{\{a_n\} \to +\infty}$ la successione DIVERGE A $+\infty$ se: $\forall M > 0$, reale, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ $a_n > M$

$\boxed{\{a_n\} \to -\infty}$ la successione DIVERGE A $-\infty$ se: $\forall M > 0$ reale $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ $a_n < -M$

Successioni irregolari ES. $\{(-1)^n\}$, $\{(-2)^n\}$

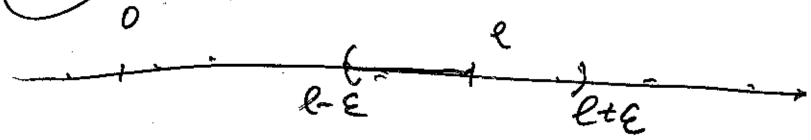
$$\forall \varepsilon > \quad \exists k \in \mathbb{N} \ t.c. \ \forall n \geq k : |a_n - l| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

$$\boxed{l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon} \qquad (a_n - \varepsilon < l < a_n + \varepsilon)$$

$\forall \varepsilon$ raggio dell'intorno di centro l



da un certo k in poi tutti gli elementi a_n $(n \geq k)$ della succ. cadono nell'intorno

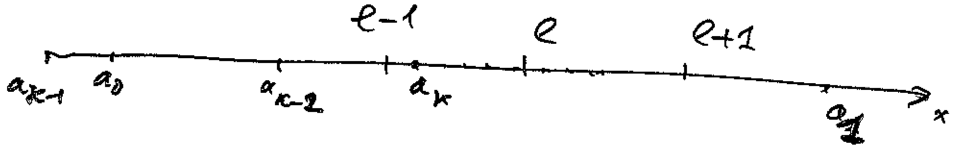
---

Ogni successione convergente è limitata.

$$\{a_n\} \to l$$

$\varepsilon = 1$: per definizione esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si abbia $l - 1 < a_n < l + 1$

Ci saranno k numeri $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ al di fuori da questo intervallo



$\underline{a_{k-1},\ a_0,\ a_{k-2},\dots}$

Considero tutti i numeri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$

$l-1,\ l+1$

e considero

$$m = \min(a_0, \dots, a_{k-1}, l-1)$$

$$M = \max(a_0, \dots, a_{k-1}, l+1)$$

(Nella figura $m = a_{k-1}$; $M = a_1$)

$$m \le a_n \le M$$: quindi la succ. è limitata

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \to 1$ Verifica del limite

$\forall \varepsilon\ \exists k$ t.c. $\forall n \ge k$ $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

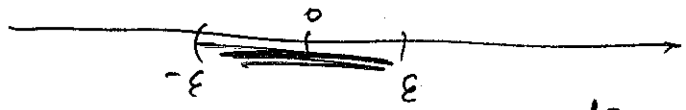
$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} > 1/\varepsilon \Leftrightarrow$

addirittura è >0 $\Leftrightarrow n > [2/\varepsilon] - 1$

conv. a 0



divergenza a $+\infty$ o $-\infty$

$(-1)^n$ non diverge perché è limitata
non converge perché se avesse un limite l dovrebbe succedere che $\forall \varepsilon\ \exists k$ t.c. $\forall n \ge k$

$$\left.\begin{matrix}|l-1| \\ |l+1|\end{matrix}\right\rangle = |l - (-1)^n| < \varepsilon$$

se fisso $\varepsilon < \min(|l-1|, |l+1|)$ sicuramente non ho valori della succ. che cadano nell'intervallo

---

$\{(-2)^n\}$ non converge poiché illimitata
non diverge a $+\infty$ poiché ci sono ∞ termini <0 : $(-2)^{2k+1}$
non diverge a $-\infty$ poiché ci sono ∞ termini >0 : $(-2)^{2k}$

Successioni monotòne.

$\{a_n\}$ monotona $\overset{\text{non decrescente}}{\boxed{\text{crescente}}}$ se $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n \le a_{n+1}$

" strettamente crescente ..... $a_n<a_{n+1}$

" $\overset{\text{non crescente}}{\boxed{\text{decrescente}}}$ se $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n \ge a_{n+1}$

" Strett. decresc. " " : $a_n > a_{n+1}$

Non sono mai irregolari:

se $\{a_n\}$ è "definitivamente crescente" $\{a_n\}\to \sup a_n$

se $\{a_n\}$ è "definitivamente decrescente" $\{a_n\}\to \inf a_n$

ove $\sup a_n=+\infty$ se $\{a_n\}$ non è sup limitata e
$\inf a_n=-\infty$ inf.

ESEMPIO. Per quali $q\in\mathbb{R}$ è monotona la succ. $\{a_n\}=\{q^n\}$?

Se $q>1$: $q^{n+1}>q^n$ monotona CRESCENTE NON SUP. LIMITATA

Se $q=1$: $\{1^n\}$ successione costante. (LIMITE: 1)

Se $0<q<1$: $0<q^{n+1}<q^n$ monotona DECRESCENTE INFERIORMENTE LIMITATA

Se $q=0$: $\{0^n, n\ge 1\}$ successione costante (LIMITE 0)

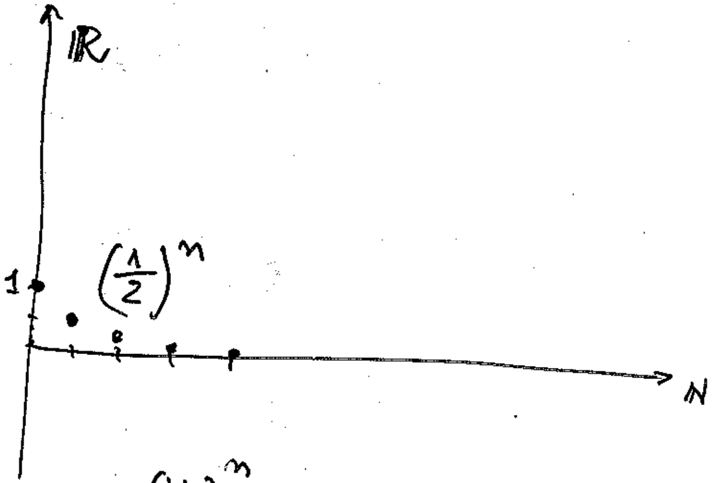
Se $-1<q<0$: SUCCESSIONE A SEGNI ALTERNI ma $|q^n| = |(-q)^n|$

Se $q=-1$ $\{(-1)^n\}$ successione IRREGOLARE

Se $q<-1$: successione IRREGOLARE

Se $q>1$:	$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$
Se $q=1$:	$\lim_{n\to\infty} q^n = 1$
se $\lvert q\rvert<1$:	$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Ricordare



$$\left(1/2\right)^n > 0$$

ma non esiste alcun numero positivo a t.c. $\forall n\in\mathbb{N}$ risulti

$$0<a<\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ad es. se $a=\frac{1}{10}$ $n=4$ viola la disuguaglianza

$$\Rightarrow \inf\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$