TEOREMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

1) PERMANENZA DEL SEGNO

$\{a_n\} \to a$ con $a > 0$ $\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha $a_n > 0$

si rilegge anche:

$\{a_n\} \to a$ con $a_n \leq 0$ (almeno da un certo indice in poi) $\Rightarrow a \leq 0$

Valgono anche le versioni con il cambio di verso nelle disuguaglianze.

2) (CONSEGUENZA)

$\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ E $\forall n \in \mathbb{N}$ o comunque definitivamente $a_n \geq b_n$ $\Rightarrow a \geq b$

3) CONFRONTO

$\{a_n\} \to \ell$, $\{c_n\} \to \ell$ E $\forall n \dots : a_n \leq b_n \leq c_n$ $\Rightarrow \{b_n\} \to \ell$

4) LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

CALCOLO DEI LIMITI

$\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ FINITI! — ALLORA:

$\{a_n \pm b_n\} \longrightarrow a \pm b$

$\{a_n b_n\} \longrightarrow ab$

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b}$ purché $b_n \neq 0$, $b \neq 0$

$\left\{a_n^{b_n}\right\} \to a^b$ purché $a_n > 0$, $a > 0$

Dim. del TEOR. della permanenza del segno.

$\boxed{\text{Ipotesi:}}$ la succ. $\{a_n\}$ converge ad $a > 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ risulti $|a_n - a| < \varepsilon$

In particolare posso scegliere ε in maniera opportuna

ad es. prendo $\varepsilon = \frac{a}{2}$. In corrispondenza esiste un $\bar{k} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{k}$ risulti

$$0 < \frac{a}{2} = a - \underbrace{\boxed{\frac{a}{2}}}_{\varepsilon} < a_n < a + \underbrace{\boxed{\frac{a}{2}}}_{\varepsilon}$$

Rilegge che: dal $\bar{k}$ in poi tutti gli a_n sono > 0

Esempio $\{a_n = \frac{n-1}{n}\}_{n>0}$. Ha limite "a" $1 > 0$

per mostrare che gli elementi della succ. sono definitivamente positivi considero $\varepsilon = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ e mi chiedo per quali n si ha $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{\dots} < \frac{1}{\dots} \Rightarrow k = 3$ e $\forall n \geq 3$ O.K.

Supponiamo che dalla proposizione A (Ipotesi) segua la proposizione B (tesi)

E' equivalente al teorema

$$A \Rightarrow B$$

il teorema

se non vale B allora non vale A

(proposizione CONTRONOMINALE)

Contronominale Del TEOR delle PERM. del SEGNO?

(A) : $\{a_n\} \to a > 0$

(B) : $\exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k \quad a_n > 0$

Allora $\boxed{\text{Supposto che } \{a_n\} \text{ sia convergente}}$ CONTESTO VALIDO PER LA FORMA DIRETTA E PER LA CONTRON.

$(\neg B) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq 0$

$\Downarrow$

$(\neg A) \quad \{a_n\} \to a \leq 0$

"=" serve

ES $\left\{-\frac{1}{n}\right\} \to 0 \quad$ e $\quad -\frac{1}{n} < 0 \quad \forall n$

Dim. del Teorema del CONFRONTO

Hp. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_1$ t.c. $\forall n \geq k_1$:

$(*) \qquad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_2$ t.c. $\forall n \geq k_2$

$(**) \qquad l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$

Dim Sia $k = \max(k_1, k_2)$. $\forall n \geq k$ sono vere entrambe $(*)$ e $(**)$

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

cioè si ha la

Tesi : $\forall n \geq k$ si ha $\ l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \qquad (\{b_n\} \to l)$

Esempio di utilizzo del teor del confronto

$\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ che cosa fa ? Tenere presente che $n \in \mathbb{N}$ e tende a $+\infty$

$|\cos n| \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\Updownarrow$ divido per n

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$-\frac{1}{n} \to 0, \quad \frac{1}{n} \to 0$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\cos n}{n}\right\} \to 0$$

ES $\left\{\frac{1-2n}{n^2}\right\}$? $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{2n}{n^2} =$

Diff. di lim. $= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} \overset{\text{prodotto}}{=} 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$

$\left\{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n^2}{1-2n^2}\right\}$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1-2n^2}{3n^2}} \overset{\text{è il prod. dei 2 limiti}}{=} (1-0) \cdot \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3n^2} - \frac{2}{3}\right)} = -\frac{3}{2}$

$\left\{\frac{1-1/n}{\frac{3n^2}{1-2n^2}}\right\}$

$\left\{2^{\frac{1-2n}{n^2}}\right\}$ $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1-2n}{n^2}} = 2^{\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2n}{n^2}} = 2^0 = 1$

$\left\{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{3n^2}{1-2n^2}}\right\} = \{a_n\}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n}\right)^{\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{1-2n^2}} = 2^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Una regola generale

$$\left\{\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_1 n + b_0}\right\} \to ?$$

Scrivere il rapporto come

$$\frac{a_k n^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right)}{b_h n^h \left(1 + \frac{b_{h-1}}{b_h n} + \dots + \frac{b}{b_h n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h}\right)}$$

e osservare che quanto tra parentesi $\to 1$

Quindi è come calcolare il limite di $\left\{\frac{a_k}{b_h}\right\} n^{k-h}$ ......

Forme di indecisione aritmetiche

Se una o ambedue le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ DIVERGONO cosa succede?

- $\{a_n\} \to a$ $\{b_n\} \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\{a_n \pm b_n\} \to \pm\infty$

  $\{a_n\} \to +\infty$ $\{b_n\} \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\{a_n + b_n\} \to +\infty$

  $\{a_n\} \to -\infty$ $\{b_n\} \to -\infty$ $\Rightarrow$ $\{a_n + b_n\} \to -\infty$

  E $\{a_n - b_n\}$? $[+\infty - \infty]$ $[-\infty - (-\infty)]$?

$\boxed{\text{ES.}}$ $\{n - n^2\}$

$\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

$\{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}\}$

- $\{a_n\} \to a > 0$ $\{b_n\} \to \pm\infty$ $\{a_n b_n\} \to \pm\infty$

  $a < 0$ ...... $\pm\infty$ ...... $\mp\infty$

  $\{a_n\} \to +\infty$ $\{b_n\} \to +\infty$ $\{a_n b_n\} \to +\infty$

  ECC. : ARITMETICA DEI SEGNI

E $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to \pm\infty$? $[0 \cdot (\pm\infty)]$?

$a_n = n$

$b_n = n^2$

F. I. $[\infty - \infty]$

ESEMPI

$\{a_n - b_n\} = \{n - n^2\} \longrightarrow -\infty$

$a_n = n^2$

$b_n = n$

$\{a_n - b_n\} = \{n^2 - n\} \longrightarrow +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot (2n^2-1)$ F.I. $[0\cdot\infty]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2(1 - 1/2n^2)}{n^2(1 + 1/n^2)} = 2$$

---

la reciproca tende a 0

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (2n^2-1) =$$

ove $\{b_n\} \to 1$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2(1 - 1/2n^2)}{n(1 + 1/n)} = \lim_{n\to+\infty} 2n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n$$

$= +\infty$

$\{a_n\} \to +\infty$

$\{b_n\} \to +\infty$

$\frac{a_n}{b_n}$?

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/b_n \to 0}{1/a_n \to 0}$$

Le due forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ e $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ sono in un certo senso equivalenti ed equivalenti a $[0\cdot\infty]$

Andare a riprendere gli esempi dati per $[0\cdot\infty]$ ed adattarli.

Regola generale per decidere di un $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: trovare nel numeratore e nel denominatore l'infinito di ordine superiore, cioè l'addendo che va a infinito + velocemente cioè ~~il~~ il termine a_n t.c. se ad es. il num. ha la forma $a_n + b_n$ succede che

$$\frac{b_n}{a_n} \to 0$$