$\boxed{ES}$ $\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (2n^2-1) \right\}$

$\left\{ \frac{1}{2^n} \cdot (2n^2-1) \right\}$

$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot 2^n \right\}$

Si legge: se $\{b_n\}$ tende a zero da destra, che significa: $\{b_n\} \to 0$ e, da un certo indice n in poi, $b_n > 0$

$\{a_n\} \to a \neq 0$, $\pm\infty$ $\quad \{b_n\} \to 0^+_-$ $\quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to \boxed{\pm}\infty$ a seconda del segno di a

$\{a_n\} \to a$ finito $\quad \{b_n\} \to \pm\infty \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to 0$

Invece $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to 0$? $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$\{a_n\} \to \pm\infty$ $\{b_n\} \to \pm\infty$? $\quad \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$

$\boxed{\text{ES. PRECEDENTI}}$

FORME DI INDECISIONE ARITMETICHE:

$[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

ESERCIZIO

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5}$$

Ancora sulle forme di indecisione aritmetica.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^3 - n^2 + \sqrt{3}n - 1}{10 - n + n^2 - n^3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \frac{2n^3\left(1 - \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2n^2} - \frac{1}{2n^3}}_{\to 0}\right)}{-n^3\left(1 - \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{10}{n^3}}_{\to 0}\right)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3}{-n^3} = -2$$

se

$a_n = P(n)$ polinomio di grado k con termine di grado massimo $A_k n^k$

$b_n = Q(n)$ polinomio di grado h con termine di grado max $B_h n^h$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{A_k n^k}{B_h n^h} = \lim_{n \to \infty} \frac{A_k}{B_h} n^{k-h} =$$

$$= \begin{cases} k > h: \text{ esponente positivo: } n^{k-h} \to +\infty \\ \quad \text{e } \frac{A_k}{B_h} \cdot n^{k-h} \to \pm\infty \text{ a seconda del segno del coeff.} \\ k = h: \ A_k / B_h \\ k < h: \text{ esp. negativo: } n^{k-h} \to 0 \end{cases}$$

Generalizziamo ...

(Vedi svolgimento a pagina successiva)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}}{n^2} \boxed{\frac{\left(1 - \frac{n^{-5}}{2} + \frac{n^{-5/2}}{2} + \frac{1}{2} n^{-3/2}\right)}{\left(1 + n^{-9/2} + 5n^{-2}\right)}} \to 1 \; =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2n^{-1/2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n-1} - \sqrt{n+1}\right) = (\infty - \infty)\,?$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1-(n+1)}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ a - b &= \frac{a^2 - b^2}{a+b} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{2n-1} &= \sqrt{2n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)} = \\ &= \sqrt{2n}\, \boxed{\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}} \to 1 \end{aligned}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{\sqrt{n}(\sqrt{2}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\boxed{\left(1 - \frac{2}{n}\right)} \to 1}{\sqrt{n}(\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}+1} = +\infty$$

OPPURE, IN QUESTO CASO:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{n+1}}{1}\right) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)} - \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \approx \sqrt{2n} - \sqrt{n} = \\ &= (\sqrt{2}-1)\sqrt{n} \quad \grave{E} \neq 0 \text{ e quindi posso scrivere:} \end{aligned}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}-1)\sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{1} = \text{l'espressione non è zero}$$

$$\approx \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0 \quad \text{e quindi il limite}$$

della ~~[illegible]~~ succ. assegnata sarà 0 o no?

Ragioniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n} + 1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2\sqrt{n}} = 0$$

Il limite è davvero zero!

Ma può andarci male!

$a_n = \sqrt{n^2 - 4n} - \sqrt{n^2+1} =$ ma l'espressione non è zero!

$\approx \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0$

Razionalizzo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-4n-1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \boxed{\sqrt{n^2}=|n|=n \text{ poiché } n>0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-4n \cancel{-1}}{2n} = -2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2-2n} - \sqrt{n^2+4} = -\infty$$

$$\approx n^{2/3} - n^1 = -n\underbrace{(1-n^{-1/3})}_{\downarrow\, 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^2-1} =$$

$$\approx n^{3/2} - n = n^{3/2}(1-n^{-1/2}) \to +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\log_2 (n^2-2n)\right] - \left[\log_2(2n^2+1)\right]\right\} =$$

Le parentesi quadre sono un facilitatore per voi

$[\infty-\infty]$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{n^2-2n}{2n^2+1} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

VEDERE LE INFO sui limiti dei log. 3 pagine dopo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_8 (n^2-2n) - \log_2(2n^2+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log_2(n^2-2n)}{\log_2 8} - \log_2(2n^2+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\log_2(n^2-2n) - \log_2(2n^2+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\log_2 (n^2-2n)^{1/3} - \log_2(2n^2+1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{n^{2/3}}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} -\log_2 n^{4/3} - 1 =$$

$$= -\infty$$

ATTENZIONE: perché un rapporto converga non è necessario che convergano (o che siano regolari) la SUCC. NUMERATORE e la SUCC. DENOMINATORE.

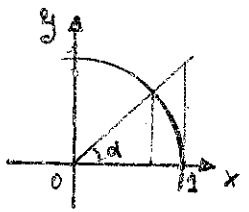
ES. $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$ ha il numeratore irregolare ma $|\operatorname{sen} n| \leq 1$.

Vale il criterio: $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\} \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a_n b_n\} \to 0$

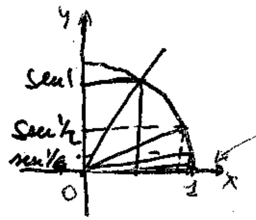
Dunque $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0$

Invece $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$?

e $\left\{n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$? $\left\{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n}\right\} \to 1$



se $\{a_n\} \to 0$: $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$



confrontare l'arco con l'ordinata.

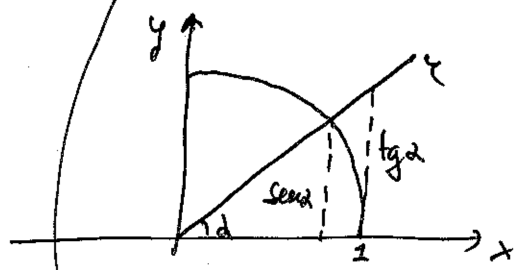
ecc.: $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\} \to 0$

In generale:

$\{\operatorname{sen} a_n\} \to 0$ se $\{a_n\} \to 0$

$\{\cos a_n\} \to 1$ se $\{a_n\} \to 0$

TEOREMA Se $\{a_n\} \to 0$, ma $a_n \neq 0$ $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$



Dalla figura: $\forall \alpha \in [0, \pi/2)$ $\operatorname{sen}\alpha \leq \alpha \leq \operatorname{tg}\alpha$. In particolare:

$0 < \operatorname{sen} a_n \leq a_n \leq \operatorname{tg} a_n$ (ho diviso per una quantità > 0)

$1 \leq \frac{a_n}{\operatorname{sen} a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n}$

(faccio il reciproco)

$1 \geq \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \geq \cos a_n$

$\downarrow$ 1 $\qquad \downarrow$ 1

per il teor del confronto anche $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$

Per quanto riguarda i logaritmi, tener presente che

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log_c b_n}{\log_c a_n} \qquad (a_n>0,\ b_n>0;\ a_n \neq 1)$$

Conviene riportarsi a questa forma, con $\boxed{c>1}$.

Allora

$\{a_n\} \to a > 0 \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to \log_c a$

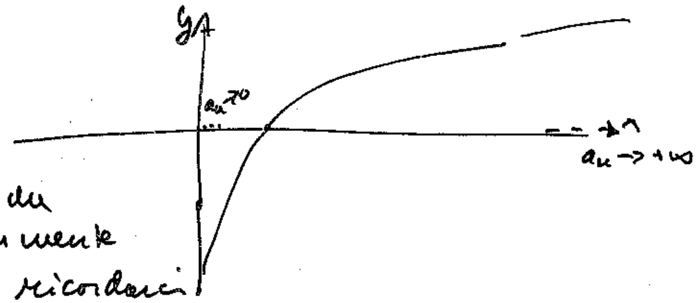
$\{a_n\} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to +\infty$

$\{a_n\} \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to -\infty$

Se $\{a_n\} \to 0+$ allora $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$

$$\left\{\log_c \frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty \qquad (c>1)$$

e quindi $\{\log_c a_n\} \to -\infty$



(dal grafico che abbiamo in mente possiamo ricordarci la formula)

ES. $\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \to$ per $n \to +\infty$

$$\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \to -\infty$$

$\left\{\log_{10} \frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right\} \to$

$$\left\{\log_2 \left(\frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right)\right\} \to -1$$

Per gli esponenziali e/o potenze:

$$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n} \qquad (a_n>0)$$

$$\left\{a_n^{b_n}\right\} = \left\{c^{\boxed{b_n \cdot \log_c a_n}}\right\} \qquad a_n>0 \ \forall n$$

Non ci sono forme di indecisione per i logaritmi

Invece per gli esponenziali:

$c^{0\cdot\infty}$

- $(c^0)^\infty$: 1^∞
- $c^{0\cdot(+\infty)}$: ∞^0
- $c^{0\cdot(-\infty)}$: 0^0

Non ci sono altre forme di indecisione.

vedi pag successiva!

Spesso il problema come segue. Sia $c>1$

(1) $\{c^{b_n}\} =$
- se $\{b_n\} \to b$ finito, tende a c^b
- se $\{b_n\} \to +\infty$, tende $+\infty$
- se $\{b_n\} \to -\infty$, tende a 0

(via ~~...~~ definizione di succ. convergente la prima, o disuguaglianze nelle prime le altre 2)

(2) Ogni altra successione esponenziale $\{a_n^{b_n}\}$ si riconduce ai casi precedenti per di scrivere

$$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n} \qquad (c>1)$$

e discutere l'esponente

In particolare si hanno forme di indecisione quando uno dei due fattori tende a 0 e l'altro a un ∞.

$\{b_n\} \to 0$ $\{a_n\} \to +\infty$ $[\infty^0]$

$\{b_n\} \to 0$ $\{a_n\} \to 0+$ $[0^0]$

$\{b_n\} \to {+\infty \atop -\infty}$ $\{a_n\} \to 1$ $[1^\infty]$

Sono le sole F. I. per l'esponenziale

∞^∞ 0^∞ sono F. I. ?

NO. Ad es:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n \overset{[0^\infty]}{=} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{2^{n\log_2 n}} = \frac{1}{2^{(+\infty)(+\infty)}} = \frac{1}{2^{+\infty}}$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0+$$

(la base può tendere solo a $+\infty$ l'esp. può tendere a $+\infty$ oppure a $-\infty$)

Ancora: $(n)^{-n} = [\infty^{-\infty}]$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{n^n} \longrightarrow 0+$$

Esempi su $[\infty^0]$

(1) $\{a_n\} = \{2^{n^2}\}$ $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$

$$\{a_n^{b_n}\} = \{2^n\} \longrightarrow +\infty$$

(2) $\{a_n\} = \{2^n\} \qquad \{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

$$\left\{a_n^{b_n}\right\} \overset{[\infty^0]}{=} \left\{2^{1/n}\right\} \longrightarrow 1$$

(3) $\{a_n\} = \{2^{2n}\} \qquad \{b_n\} = \left\{\frac{1}{n-1}\right\}$

$$\left\{a_n^{b_n}\right\} \overset{[\infty^0]}{=} \left\{2^{\frac{2n}{n-1}}\right\} \longrightarrow 2^2 = 4$$

(4) $\{a_n\} = \{2^{n^2}\} \qquad b_n = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$

$$\left\{a_n^{b_n}\right\} \overset{[\infty^0]}{=} \left\{2^{-n}\right\} \longrightarrow 0+$$

Quindi posso ottenere qualunque numero ≥ 0 come limite ($+\infty$ event. ....)

Non numeri < 0 per la contronominale del teor. della perm. del segno.

Qualche ESEMPIO

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \longrightarrow 2^{+\infty} = +\infty$$
$$\left\{\left(2^{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\} \longrightarrow 2^{0} = 1$$
$$\left\{\left(2^{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \longrightarrow 2^{2} = 4$$
$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{-1/n}\right\} \longrightarrow 2^{-\infty} = 0+$$

Es. di ∞^0

Per avere esempi di 0^0 sostituire alla base 2 la base $\frac{1}{2}$.

ALTRI ESEMPI DOPO IL CONFRONTO DI ∞

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \longrightarrow ?$$

ESEMPIO CHIAVE

- Successione crescente
- Successione limitata

Quindi converge. A un numero (che si dimostra irrazionale trascendente) che chiama

e (NUMERO DI NEPERO)

vedi pagR11

Prime cifre decimali:

2.718281824.....

Successione crescente <u>molto lentamente</u>

$n=1$: 2
$n=2$: 2.25
$n=3$: $64/27 = 2.\overline{370}$
$n=4$: $625/256 = 2.44140625$
⋮
$n=10$: $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.59374246$

Fare l'esercizio di tabulazione sul [illegible].