Qualche ESEMPIO

$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \to 2^{+\infty} = +\infty$

$\left\{\left(2^{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\} \to 2^{0} = 1$

$\left\{\left(2^{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \to 2^{2} = 4$

$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{-1/n}\right\} \to 2^{-\infty} = 0^+$

Es. di ∞^0

Per avere esempi di 0^0 sostituire alla base 2 la base $\frac{1}{2}$.

ALTRI ESEMPI DOPO IL CONFRONTO DI ∞

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \to ?$ ESEMPIO CHIAVE

- Successione crescente .....

Invece $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente...

- Successione limitata (sup. e inf.)

Quindi convergenti. A un numero (che si dimostra irrazionale trascendente) che chiama

e (NUMERO DI NEPERO)

vedi pag R11

Prime cifre decimali:

2.718281824.....

Successione crescente <u>molto lentamente</u>

$n=1$: 2
$n=2$: 2.25
$n=3$: $64/27 = 2.\overline{370}$
$n=4$: $625/256 = 2.44140625$
:
$n=10$: $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.59374246$

Fare l'esercizio di tabulazione sul testo

ultima volta!

$$\left\{a_n^{b_n}\right\} = \left\{c^{b_n \log_c a_n}\right\} \quad (c>1)$$

F.I. $[\infty^0]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$

$\{a_n\} \to 1 \quad \to \{\log_c a_n\} \to 0$
$\{b_n\} \to \infty$

SUCCESSIONE DI NEPERO

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

TEOREMA: converge ad un numero reale [irrazionale trascendente] compreso tra 2 e 3 e che chiamiamo numero di NEPERO e denotiamo con e

$\boxed{\text{Strategia di dimostrazione:}}$

Serve uno strumento tecnico

Disuguaglianza di BERNOULLI

$\alpha \geq -1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

Provo a capirla:

$\boxed{n=2}$ $\quad (1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \overset{\geq 0}{\boxed{\alpha^2}} \geq 1 + 2\alpha$

$\boxed{n=3}$ $\quad (1+\alpha)^3 = (1+\alpha)(1+\alpha)^2 \geq (1+\alpha)(1+2\alpha) =$

$= 1 + 3\alpha + \boxed{2\alpha^2}$

$\geq 1 + 3\alpha$

⋮

$\boxed{n}$ $\quad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

$\boxed{n+1}$ $\quad (1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n (1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha) =$

$= 1 + (n+1)\alpha + \boxed{n\alpha^2}$

$\geq 1 + (n+1)\alpha$

Applico il principio di induzione:
la disug. è vera per $n=2$
se è vera per n lo è per $n+1$
quindi è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

1ª tesi x Nepero

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è una succ. crescente.

$\forall n \geq 2 \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ TESI

Elaboro la tesi

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n} \quad (TS)$$

tutti i fattori sono >0

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} \quad (TS)$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} \quad (TS)$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

VERO per la disug di Bernoulli

la succ. cresce!

$\boxed{\text{2ª tesi x NEPERO}}$

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ decresce, cioè

TS: $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff$

$\iff \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \iff$

$\iff \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n} \iff \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \overset{B}{\geq} 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$

SI

Ovvio che:

$$2=(1+1)^1 \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{CRESCE}} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\text{DECRESCE}} \le (1+1)^{1+1}=4$$

quindi entrambe le succ. sono limitate e comprese $\boxed{\text{fra } 2 \text{ e } 4}$ $\boxed{3^a \text{ Teor. } \times \text{ NEPERO}}$

Quindi convergono!

se $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \to l$

allora $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\} \to l\cdot 1$

Entrambe convergono allo stesso limite, che chiamiamo $\boxed{e}$ $\boxed{\text{FINE DELLA DIM. di NEPERO}}$

Dove sta e? Ad es.:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \le e \le \left(1+\frac{1}{3}\right)^4$$

$$2.\overline{370} \le e \le 3.419$$

2.37~~4~~
1.~~4~~
10484
2371
3.4194

$n=10$?

controllare se $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11} < 3$? fare qualche conto

E facile vedere che vale la limitazione $2<e<3$.

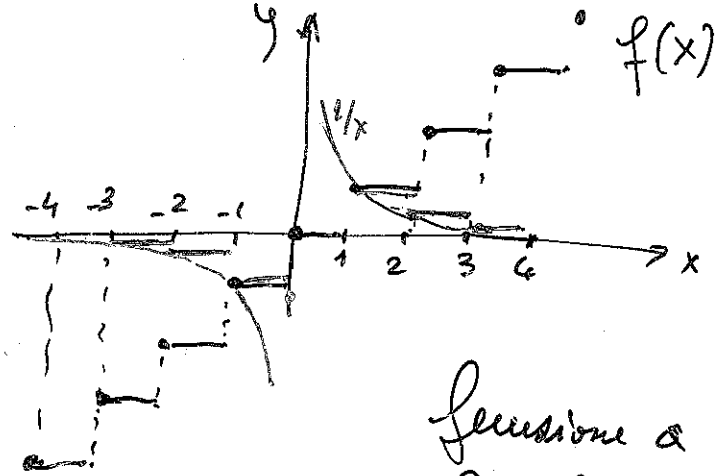
$\boxed{\text{VEDI LUCIDO SUCCESSIVO}}$

$x \in \mathbb{R}$. Parte intera di x è il più grande intero $\le x$

$$\lfloor x \rfloor$$

$\lfloor 2.3 \rfloor = 2$ $\quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$

$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$



$f(x)=\lfloor x \rfloor$

funzione a gradini

Per def.

$$x \ge \lfloor x \rfloor$$

se $\lfloor x \rfloor \neq 0$ $\quad \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$

$x>0 \quad \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \ge \frac{1}{x}$

$x<0 \quad \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \ge \frac{1}{x}$

$a^x \ge a^{\lfloor x \rfloor}$ se $a>1$

E la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ a cosa tende?

E " $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\}$? $\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$

Allora se $\boxed{\{a_n\} \longrightarrow +\infty}$, da

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}$$

ove $\lfloor x\rfloor$ = parte intera di x, cioè il più grande intero $\le x$

si ricava

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e}$$

Lo stesso se $\{a_n\} \to -\infty$

ESERCIZI Calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$ ove a_n è:

- $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n}$
- $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}$
- $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n}$
- $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2+1}\right)^{n^3}$

Svolgimenti nelle prossime 3 pagine

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{2}{n+1}}}_{\frac{1}{a_n}}\right)^{n} = \qquad \frac{2}{n+1} = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}}\right]^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = \left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{b_n}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\lim_{n\to\infty} b_n} = \qquad \text{ove } b_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^{2}$$

In generale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{a_n}\right)^{a_n} = \qquad \text{ove } \{a_n\} \to +\infty \ (-\infty)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{t}}\right)^{\frac{a_n}{t}}\right]^{t} = e^{t}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\boxed{\left(1+\frac{1}{\frac{1-n^2}{3}}\right)^{\frac{1-n^2}{3}}}^{\cdot\frac{3}{1-n^2}\cdot(n^2+n)}=$$

$\to e$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3(n^2+n)}{1-n^2}}=e^{-3}$$

non sono importanti per il calcolo del limite i termini di grado inf. a quello max che compaiono al den. di $\frac{1}{a_n}$ e all'esponente b_n

Potrei rifare i conti così:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n^2}\right)^{n^2}$$

che è della forma $\left(1+\frac{t}{a_n}\right)^{a_n}$ con $\{a_n\}\to+\infty$

$$=e^{-3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n}\ [1^\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-3}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=$$

$$=\left(e^{-3}\right)^0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}=[1^\infty]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n\cdot n}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{\lim_{n\to\infty}n}=\left(e^2\right)^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}=[1^\infty]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(\cancel{n^3}-5n+1)-(\cancel{n^3}+n^2-1)}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}=(*)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n^2-5n+2}{n^3+\cancel{n^2}-\cancel{1}}\right)^{n^3}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-n^2} = e^{-\infty} = 0$$

(*)

Stesso grado

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 5n + 1 & n^3 + n^2 - 1 \\ \hline -n^3 - n^2 + 1 & 1 \\ \hline -n^2 - 5n + 2 & \end{array}$$

1 ← quoziente

resto = dividendo − divisore

Dal limite di Nepero discendono 5 limiti fondamentali →

Ma attenzione che ci sia davvero una F.I. $[\infty \cdot 0]$. Ad es.

$$\lim_{n\to\infty} n \log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

---

1) Se $\{b_n\} \to 0$ per $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(b_n+1)}{b_n} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \cdot \ln(1+b_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \boxed{(1+b_n)^{1/b_n}} = \ln e = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = [\infty \cdot 0]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10} e \cdot \ln\left(1 + \boxed{\frac{1}{2n}}\right)}{2 \boxed{\frac{1}{2n}}} = \frac{\log_{10} e}{2} =$$

$$= \frac{1}{2 \ln 10}$$