$$\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\} \xrightarrow{?} e$$

Spiegazione su un dettaglio della dim. del Teor. di Nepero

$$\|$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \to \frac{e}{1} = e \quad \text{sì}$$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to e$, $\quad 1+\frac{1}{n+1} \to 1$

MATE ASS. domani 10.30-12.30

aula 210 : DISEQ.

Sia $\{b_n\} \to 0$ per $n \to \infty$. Allora

$$\left\{\frac{e^{b_n}-1}{b_n}\right\} \, ? \qquad c_n = e^{b_n}-1 \longrightarrow 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{b_n} = c_n + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$b_n = \ln(c_n+1)$$

$$\|$$

$$\left\{\frac{c_n}{\ln(1+c_n)}\right\} \quad \text{con } c_n \to 0$$

$$\|$$

$$\left\{\frac{1}{\frac{\ln(1+c_n)}{c_n}}\right\} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$$

① Per ogni successione $\{a_n\}$ che sia divergente ($a+\infty$ o $a-\infty$) risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

② Per ogni succ. $\{b_n\} \to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{1/b_n} = e \qquad \left(b_n = \frac{1}{a_n}\right)$$

③ Per ogni succ. $\{b_n\} \to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 \qquad \ln = \log_e \qquad \ln(1+b_n) \sim b_n$$

APPLICO IL LOG in base e alla success. ②

④ Per ogni succ. $\{b_n\} \to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1 \qquad e^{b_n}-1 \sim b_n$$

⑤ Per ogni succ. $\{b_n\} \to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n} = t \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$(1+b_n)^t - 1 \sim t\, b_n$$

LIMITI NOTEVOLI $\qquad \sin b_n \sim b_n$

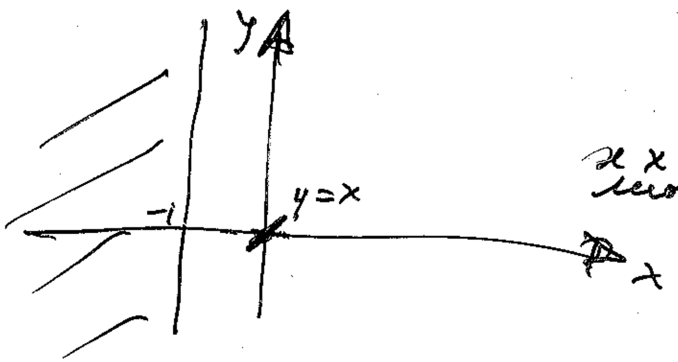
DEF Dico che due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE (per $n\to+\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\left\{ \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} \right\} \to 1 \quad \text{se } \{b_n\} \to 0$$

Significato dei due limiti 3 e 4

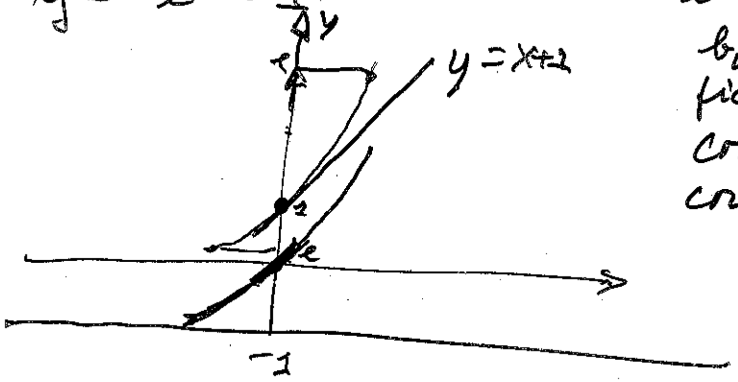
$y = \ln(1+x)$



se x è molto molto piccolo $\ln(1+x)$ è pressapoco x

$$\left\{ \frac{e^{b_n}-1}{b_n} \right\} \to 1 \quad \text{se } \{b_n\} \to 0$$

$y = e^x - 1$



$e^{b_n} - 1$, se b_n è molto piccolo, si comporta come b_n

uso dell'asintoticità:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Invece di calcolare il lim. di $\left\{ \frac{e^{1/n}-1}{\ln(1+\frac{1}{n})} \right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{n}} =$$

così (moltiplico e divido per $1/n$)

Sostituisco l'asintotico!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} = 1$$

$b_n = \frac{1}{n}$

$$e^{1/n} - 1 \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\ln(1+1/n)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left.\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right\} \longrightarrow 1}{\left.\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}\right\} \longrightarrow 1} = 1$$

VERO MA INUTILE!
È UTILE LA NOZIONE DI ASINTOTICITÀ SE UNA DELLE DUE SUCC. È BEN NOTA.

Uso gli asintotici nel calcolo del limite quando ho a che fare con rapporti (o prodotti)

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(e^{2/n}-1\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2/n}-1}{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{2}} \xrightarrow{} 1 \quad = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Oppure con gli asintotici:

$$e^{2/n} - 1 \sim \frac{2}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{2}{n} = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(5^{\frac{n+1}{n^2+1}} - 1\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$\lim_{n\to\infty} n \underbrace{\left(e^{\frac{n+1}{n^2+1}\cdot\ln 5} - 1\right)}_{} =$$

visto che $\frac{n+1}{n^2+1}\cdot\ln 5 \to 0$ quanto tra parentesi è asintotico a $\left(\frac{n+1}{n^2+1}\cdot\ln 5\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n+1}{n^2+1}\cdot\ln 5\right) = \ln 5$$

Se $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

- $\lim_{n\to\infty} n\,\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\infty\cdot 0]$

eccetera....

ESEMPIO

LEZIONE PRECEDENTE!!

$\lim_{n\to\infty} n\log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$

$\lim_{n\to\infty} n\log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

$\lim_{n\to\infty} n^2\log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

MA ATTENZIONE AI FALSI ANALOGHI.

$\lim_{n\to\infty} n\log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) =$

- $\lim_{n\to\infty} n(\underbrace{e^{1/n}-1}_{b_n}) = [\infty\cdot 0]$

$\Downarrow$

$n = ?$

e in generale: $\lim_{\substack{a_n\to 0\\ n\to+\infty}} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

- $\lim_{n\to\infty}[\underbrace{(1+1/n)^{\sqrt{2}}-1}_{b_n}]\,n = [0\cdot\infty] = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{n}}$

$\Downarrow$

$\ln(b_n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$ ....

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1\right]n = [0\cdot\infty] =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^{\sqrt{2}}-1}{1/n} = \sqrt{2}$

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1\right]\cdot \underbrace{n^{3/2}}_{n\cdot n^{1/2}} = \sqrt{2}\cdot(+\infty) = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right) = [\infty\cdot 0]$

$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\underbrace{\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^{1/3}-1}_{\boxed{(1+a_n)^t-1}\ \sim\ a_n\cdot t}\right) =$

$a_n = \frac{-2}{n^2+1} \to 0$

$t = 1/3$

$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{n^2+1}\right) = -\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3}=$$

ATTENZIONE: il limite non dipende dal confronto tra il grado del numeratore (e del denominatore) con il grado dell'esponente!

$$\lim_{n\to\infty} n\left(5^{(n+1)/(n^3+1)}-1\right)=$$ Vedi 2 pag. prima

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right)=$$ vedi pag. precedente

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=[1^\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\sqrt{n}}\right)^{\cancel{-\sqrt{n}}}\right)^{-\sqrt{n}}=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n=[1^\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n\cancel{+1}}{n^2\cancel{-n+1}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}=[1^\infty]$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln n}$$

Problema è come confrontare $\ln n$ con n, poiché all'esponente ho una succ. che è asintotica a $\frac{1}{n}\cdot\ln n$

Confronti di infiniti e di infinitesimi

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: dico che $\{a_n\}$ è un infinitesimo

$= +\infty$, $= -\infty$] dico che $\{a_n\}$ è un infinito

Esempi $\{\log n\}$, $\{\sqrt{n}\}$, $\{n^3\}$, $\{3^n\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ infinito di ordine inferiore risp. } \{b_n\} \\ \ell \text{ finito} \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ hanno = ordine di infinito} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è infinito di ordine sup. risp. a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ SONO NON CONFRONTABILI} \end{cases}$$

Se sono infinitesimi la terminologia si ribalta.

In particolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_c n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall c>1 \text{ e } \forall \alpha>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{c^n} = 0 \qquad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \qquad \forall c>1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Gli ultimi confronti si basano sul TEOREMA (CRITERIO del RAPPORTO)

se $a_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Limiti notevoli

Per ogni $\{a_n\} \to 0$ allorché $n \to +\infty$:

0) $\{\operatorname{sen} a_n\} \to 0$; $\{\cos a_n\} \to 1$; $\{\operatorname{tg} a_n\} \to ?$

1) $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1 \implies \operatorname{sen} a_n \sim a_n$ se $\{a_n\} \to$

2) $\left\{(1+a_n)^{1/a_n}\right\} \to e$ NEPERO

3) $\left\{\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right\} \to 1 \implies \ln(1+a_n) \sim a_n$ se $\{a_n\} \to$

4) $\left\{\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\} \to 1 \implies e^{a_n}-1 \sim a_n$ se $\{a_n\} \to$

5) $\left\{\frac{(1+a_n)^t-1}{a_n}\right\} \to t \implies (1+a_n)^t - 1 \sim t a_n$ se $\{a_n\} \to$

Per ogni $\{a_n\} \to +\infty$ allorché $n \to +\infty$

1) $\left\{\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \to e$ ← (VALIDO ANCHE SE $\{a_n\}$ DIVERGE A $-\infty$)

2) $\left\{\frac{\ln(a_n)}{a_n^\beta}\right\} \to 0 \quad \forall \beta>0$

3) $\left\{\frac{a_n^\beta}{e^{a_n}}\right\} \to 0 \quad \forall \beta>0$

- Possibilità di ricavare limiti analoghi con basi $c>1$ ....
- Ricordare le regole algebriche di calcolo e le regole sulle succ. del tipo $\{\ln(a_n)\}$
- Applicare a $\{a_n^{b_n}\}$ → $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$

ESEMPI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)^5+5(\log_e n)^4}{\sqrt[10]{n-1}-20} =$$ vedi pag dopo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n\ln(n)}{n^2+1}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} =$$

lo trascuro

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{e^{n/2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{\frac{n}{2}}} =$$

poiché se $\{a_n\}\to+\infty$, $\left\{\frac{a_n^{\beta}}{e^{a_n}}\right\}\to 0$, $a_n=\frac{n}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^3}{e^{\frac{n}{2}}} =$$

$$= 8\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n})^6}{e^{\sqrt{n}}} = 0$$

MA:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{\ln n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = +\infty$$

CONTRO GLI SLOGAN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)^5 + 5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n-1} - 20} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} e)^5 (\ln n)^5 + 5(\ln n)^4}{(n-1)^{1/10}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^5 \cdot (\log_{10} e)^5 \underbrace{\left(1 + \frac{5}{(\log_{10} e)^5 \cdot \ln n}\right)}_{\to 1}}{(n-1)^{1/10}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^5}{(n-1)^{1/10}} \cdot (\log_{10} e)^5 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^5}{n^{1/10}} \cdot (\log_{10} e)^5$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\boxed{\frac{\ln n}{n^{1/50}}}\right)^5 \cdot (\log_{10} e)^5 = 0$$

$\to$ limite notevole confronto di ∞ DA' 0

ordine di infinitesimo

siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due succ. che tendono a 0 per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ è un infinitesimo di ordine SUPERIORE a } \{b_n\} \\ l \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è un infinitesimo di ordine INFERIORE a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \text{: gli infinitesimi } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

Ad es. $\left\{\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\right\} \to 0$

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$

ma questi sono <u>infinitesimi non confrontabili</u> poiché

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n} \operatorname{sen} n}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n$$

non esiste