ESEMPI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)^5+5(\log_e n)^4}{\sqrt[10]{n-1}-20} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} =$$ vedi pagina succ.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n\ln(n)}{n^2+1}\right)^n =$$ vedi pagina succ.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} =$$ vedi pagina succ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} =$$ Criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}+n^{1/6}}{n^{1/2}+1} = n^{1/3}(1+\underbrace{n^{-1/6}}_{\downarrow 0})$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{3} = \frac{1-2}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}}{n^{1/2}} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(2n-3)} \; (*) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n^2}{\ln 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{\ln n+\ln 2} = 2$$

$(*)$ $\ln(n^2+1) = \ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] = \ln n^2 + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \to 0$ la trascuro

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{2^{(\log_2 3)\cdot n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{n^2-(\log_2 3)\cdot n} = +\infty$$

Se ho basi $\neq$ ed esponenti $\neq$ mi riconduco ad avere la stessa base.

Proposta di uno studente: invece di

$$3^n = 2^{(\log_2 3)\, n}$$

sviluppo:

$$(2+1)^n = 2^n + n\, 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \dots$$

Ma non sono in grado di controllare qual è l'effetto della somma di numero molto grande d'addendi ciascuno grande

Quindi strada non praticabile

$$\lim_{n\to\infty} e^{2n}\left(\sqrt{1-2e^{-2n}} - 1\right) = [\infty\cdot 0]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{2n}\left(\big(1\underbrace{-2e^{-2n}}_{\{-2e^{-2n}\}\to 0}\big)^{1/2} - 1\right) = \qquad (1+a_n)^{t}-1 \sim t a_n \text{ se } \{a_n\}\to 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cancel{e^{2n}}\cdot\frac{1}{2}\left(-2\cancel{e^{-2n}}\right) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n} = [1^\infty]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\cdot \ln n}$$ all'esponente ho F.I. $[0\cdot\infty]$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \ln n = 0$$

l'esponente tende a 0 e quindi la succ. tende a 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n\ln n}{n^2+1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\ln n}\cdot \ln n} = +\infty$$

Limite notevole

se $\{b_n\}\to 0$ $\quad (1+b_n)^{1/b_n} \to e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} = [1^\infty] =$$

primo problema:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$$

a partire da $n \geq 2$ la succ. decresce e ha estremo inf 1 $\Rightarrow$ limite 1

$$\lim_{n\to\infty} e^{(\ln\sqrt[n]{n-1})\cdot\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot\ln(n-1)\cdot\ln n} = e^0 = 1$$

poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n} = 0$

Attenzione $(n-1)^{\frac{\ln n}{n}}$ è F.I. $[\infty^0]$

LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Siano: (a,b) un qualunque intervallo (anche illimitato: $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$);

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funz. reale di variab. reale;
- $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$;
- $c\in(a,b)$ (oppure $c=\infty$ oppure $c=-\infty$); ma in c la funzione potrebbe anche non essere definita

Allora si dice che al tendere di x a c la funzione $f(x)$ tende al limite ℓ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ che tende a c la successione $\{f(x_n)\}$ tende a ℓ

Es. So che per ogni $\{x_n\}\to 0$ si ha $\left\{\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right\}\to 1$

Quindi $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ATTENZIONE. Non basta 1 successione:

se $x_n = \pi n$ $\quad \{\operatorname{sen} x_n\} = \{0\} \to 0$

ma $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste!

Infatti se si prende la succ. di term. generale

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\{\operatorname{sen} x_n\} \longrightarrow 1 \neq 0.$$

Definizione analoga nel caso della divergenza (sostituire ℓ con $+\infty$ o $-\infty$)

se $\{a_n\} \to \pm\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Limiti che si deducono da quelli visti sulle successioni

Si rilegge

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

se $\{b_n\} \to 0$, allora

$$\lim \left(1+b_n\right)^{1/b_n} = e \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x} = e$$

$$\lim \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim \frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

$$\lim \frac{(1+b_n)^{t}-1}{b_n} = t \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{t}-1}{x} = t$$

$$\lim \frac{\sin b_n}{b_n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

se $\{a_n\} \to +\infty$

$$\lim \frac{\ln(a_n)}{a_n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim \frac{a_n^{\,c}}{e^{a_n}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{c}}{e^{x}} = 0$$

$\forall c>0$

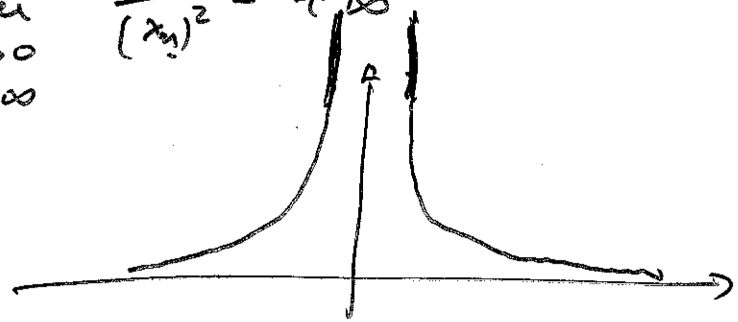
Ancora come esempio di applicazione della def:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \{x_n\}\to 0$$

$\{x_n^2\} \to 0+$

poiché $x_n^2 \geq 0$

$$\lim_{\substack{\forall \{x_n\}\to 0\\ n\to\infty}} \frac{1}{(x_n)^2} = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

$\{x_n\}\to 0$, $x_n>0$ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}\to+\infty$

$x_n<0$ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}\to-\infty$

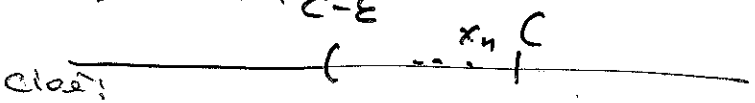
Il limite non esiste!

Dico che $\lim_{x\to c-} f(x) = l$ se per ogni successione $\{x_n\}\to c-$ si ha

$$\lim f(x_n) = l$$

Ove $\{x_n\}\to c-$ significa:

Visivamente:



cioè:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ risulti

$$c-\varepsilon < x_n < c$$

Dualmente $\{x_n\} \to c+$ se

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ risulti

$$c < x_n < c+\varepsilon$$

Esiste

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

non esiste $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

In generale se esiste $\displaystyle\lim_{x \to c+} f(x) = \boxed{\ell}$ ed

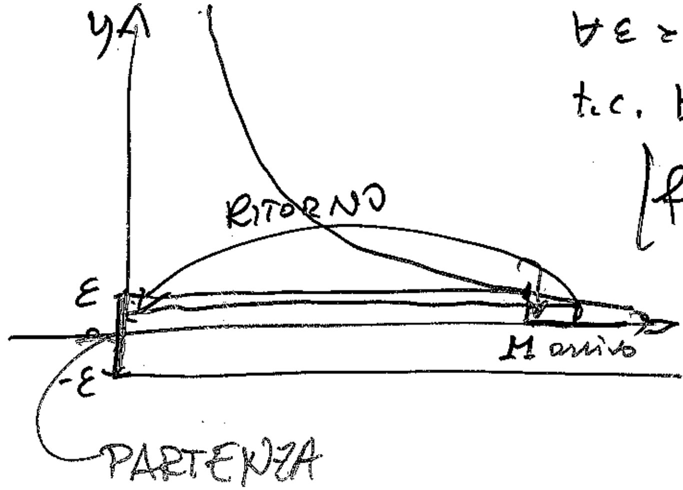
esiste $\displaystyle\lim_{x \to c-} f(x) = \boxed{\ell}$

allora esiste $\displaystyle\lim_{x \to c} f(x) = \ell$

Esistono altre definizioni di limite (in genere dipendono da chi è c, e chi è ℓ) Ad es.:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $\forall x > M$ si ha $|f(x) - 0| < \varepsilon$



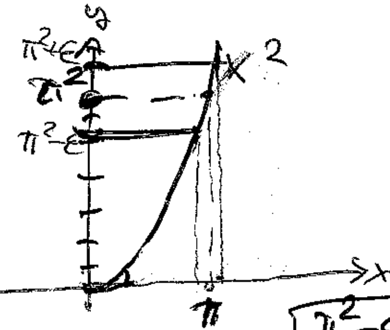
Oppure se:

$f(x) = x^2$

$\displaystyle\lim_{x \to \pi} f(x) = ?\;\; f(\pi) = \pi^2$

Dimostro che è vero

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta$ t.c. $\forall x \in (\pi-\delta, \pi+\delta)$ risulti $|f(x) - \pi^2| < \varepsilon$?



$$\boxed{\pi^2 - \varepsilon < \boxed{x^2} < \pi^2 + \varepsilon}$$

Risolvo le due diseq. Tenendo conto che voglio $x > 0$: $\sqrt{\pi^2-\varepsilon} < x < \sqrt{\pi^2+\varepsilon}$. Calcolo minimo$(\sqrt{\pi^2+\varepsilon} - \pi, \pi - \sqrt{\pi^2-\varepsilon}) = \delta$: $\forall x \in (\pi-\delta, \pi+\delta)$ si ha ....

CALCOLO dei LIMITI di funzione

INGREDIENTI :
1) OPERAZIONI SUI LIMITI
2) LIMITI FONDAMENTALI (da SUCCESSIONI)
3) TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

1. OPERAZIONI SUI LIMITI

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ed esistano

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to c} g(x) = \ell'$ (ℓ, ℓ' eventualm. infiniti)

(1) $\lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \ell \pm \ell'$ ... salvo forma di indecisione $\infty - \infty$

(2) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot \ell'$ ... salvo forma di indecisione $0 \cdot \infty$

(3) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ purché $g(x) \neq 0$ in tutti i punti di un intorno di c, diversi da c e purché $\ell' \neq 0$.

ATTENZIONE AL CASO $\frac{\ell}{0}$: se $\lim_{x \to c} g(x) = 0^+$ ... (oppure 0^-).
Se invece $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ senza verso ...

FORME DI INDECISIONE : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

LIMITI DI FUNZ. COMPOSTE.

Siano $f: (a,b) \to \mathbb{R}$; $g: (a',b') \to \mathbb{R}$ con $f((a,b)) \subseteq (a',b')$
$(a, b, a', b'$ eventualmente infiniti) e sia f non costante. Se

$\lim_{x \to c} f(x) = c'$ (con $c' \in (a',b')$) e

$\lim_{t \to c'} g(t) = \ell$

allora $\lim_{x \to c} g(f(x)) = \ell$

Se la funzione è costante il teor. del limite delle funz. composte può fallire!

$f(x) = 2$

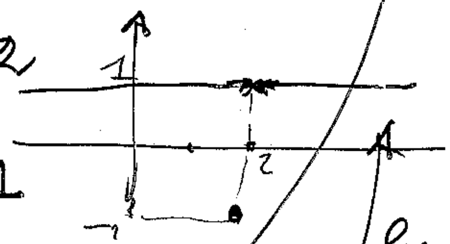
$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 2 \\ -1 & \text{se } t = 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} g(2) =$
$= \lim_{x \to 0} (-1) = -1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

$\lim_{t \to 2} g(t) = 1$

$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 1$



funzione non continua ...

Problemi.

Definizione di funzione continua.

Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (a, b event. $-\infty, +\infty$)

e sia $c \in (a,b)$.

Dico che f è continua in c se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Esplicitiamo:

1) f è definita in c (e vale $f(c)$)

2) esiste ed è finito il limite per $x \to c$ della funzione

3) il limite coincide con il val. della funzione

E visto che $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ equivale al fatto che

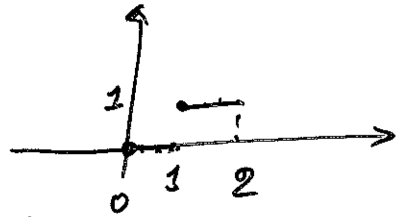
$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c) \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$$

si può anche scrivere $\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Situazioni di non continuità

1) se $\lim_{x \to c-} f(x) \neq \lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$



$\lfloor x \rfloor$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 = f(1)$

DISC. A SALTO o di 1° tipo

$\Longrightarrow$ $\lfloor x \rfloor$ non è cont. in $x=1$

è continua dalla destra.

---

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ -1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ ELIMINABILI

discontinua in $x = 2$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 1$$

ma $\neq f(2) = -1$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ continua

se ci metto 0: disc. elimin.