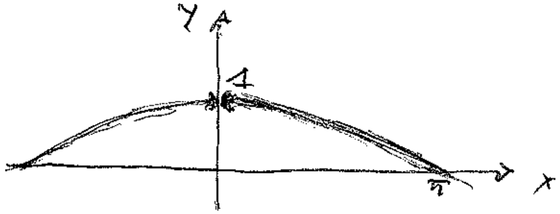
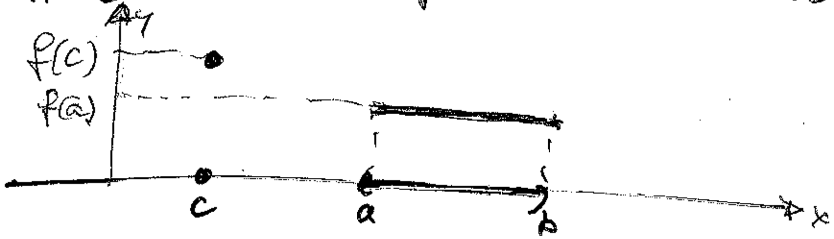
Osservazione a parte:

Per poter parlare di limite di una funzione $f(x)$ per $x \to c$ non è necessario che la funzione sia definita in c; basta che $f(x)$ sia definita in un intorno del punto c, privato di c

Es. La funz. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è def. in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ ma posso calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;



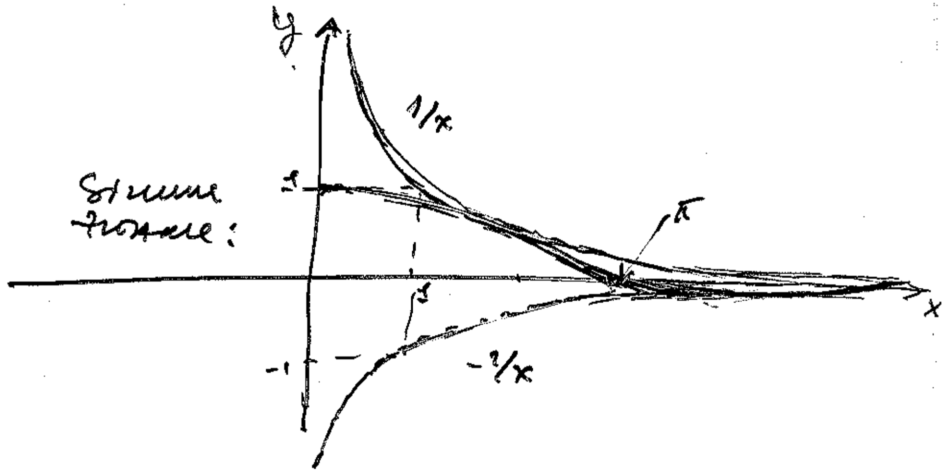
Il problema sarebbe calcolare $\lim_{x \to c} f(x)$, se funzione definita ad es. così:



punto isolato

. Qui non calcolo il limite

Grafico di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Come lo traccio?



rapporto di 2 dispari $\Rightarrow$ pari

$|\operatorname{sen} x| \le 1$

$\operatorname{sen} x = 0$

$x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| \Rightarrow$ è compreso tra il grafico di $\frac{1}{x}$ e quello di $-1/x$

Ancora sui TIPI di DISCONTINUITÀ:

①
$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

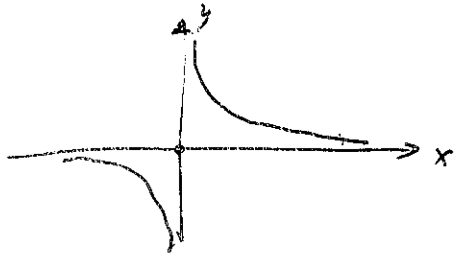
è continua in $x=0$?

Ricordo la DEF di continuità in un punto c:

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $c\in(a,b)$
$f(x)$ è continua in $x=c$ se
$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}=e^{+\infty}=+\infty$$

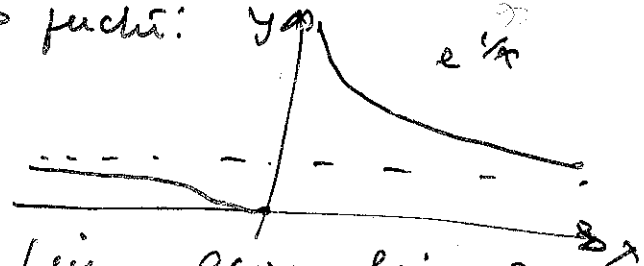
non può essere continua da destra



$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}=$$
$$=e^{-\infty}=0=f(0)$$

la funzione è continua da sinistra in $x=0$

ma presenta una discontinuità di I specie in $x=0$ perché:



$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

② Il limite per $x\to c$ potrebbe non esistere

Ad es:
$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

f è def. su $(-\infty,+\infty)$
$f(0)=0$
ma $\lim_{x\to 0^\pm} \sin\frac{1}{x}$ = NON ESISTE

Discontinuità di 2ª specie

Particolari funzioni continue in ogni punto dell'I.D.

1) le potenze con esponente $\alpha\in\mathbb{N}$, $\in\mathbb{Z}$, $\in\mathbb{Q}$, $\in\mathbb{R}$ (nell'I.D. ...)
$$\lim_{x\to c} x^\alpha=c^\alpha \quad \forall c\in \text{I.D.}$$

2) esponenziali con base qualunque $a>0$

3) $\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

4) $\sin x$, $\forall c\in\mathbb{R}$; $\cos x$, $\forall c\in\mathbb{R}$; $\operatorname{tg} x$ $\forall c\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

5) $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \arcsin x = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

→ Se so che una funz. f è cont. in ogni punto del suo I.D., i limiti per $x \to c$ finito, $c \in$ I.D.(f) si calcolano semplicemente sostituendo

→ Ho visto che le funz. elem. sono continue in ogni $c \in$ I.D. $\Rightarrow$ i loro limiti per $x \to c$ finito li so calcolare

→ posso considerare funzioni che sono $+, \times, -, :$ di funz. elementari: vado ad applicare le regole per il calcolo dei limiti / aritmetica

→ posso cons. funzioni composte di funz. element (o di loro $+, \times, -, :$) e con il teor. di comp. dei limiti calcolo il limite ...

2. LIMITI FONDAMENTALI

(A) Sia $f(x)$ una delle funzioni (elementari)

x^α, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$

e sia c un numero appartenente all'I.D. di $f(x)$ (o)

Allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0+ & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0+ \text{ se } \alpha > 0 \\ 1 \text{ se } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0+ & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \dots \; x = -t, \; t \to +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ NON ESISTE (idem per $x \to -\infty$ e per $\cos x$)

Applicando il teorema sui limiti di funz. composte si ha se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$: $\lim_{x \to c} a^{f(x)} = a^\ell$, $\lim_{x \to c} \log_a f(x) = \log_a \ell$

(o) Merita attenzione il caso x^α con α reale ≥ 0

Il suo ID è $[0, +\infty)$ ma non si può calcolare $\lim_{x \to 0} x^\alpha$ (per $x < 0$ la funzione non è definita). Però

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0^\alpha = 0.$$

La situazione è più semplice per α intero...

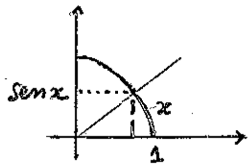
Più in generale, se $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$ e $\lim_{x\to c} g(x)=\ell'$

(c, ℓ, ℓ' eventualmente infiniti)

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \ell^{\ell'}$$

Forme di indeci[illegible] : evidenziate scrivendo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ e ricordando la forma di indecisione del prodotto.

(B) • $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



• NEPERO e conseguenze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{z\to 0\pm}(1+z)^{1/z} = e = \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}$$

$$\lim_{z\to 0\pm}\frac{\ln(1+z)}{z} = 1 = \lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^t-1}{x} = t \qquad \text{per ogni } t \text{ reale}$$

• CONFRONTO di INFINITI

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha>0,\ \forall\beta>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \forall\alpha>0,\ \forall a>1$$

• CONFRONTI TRA INFINITI E INFINITESIMI DELLO STESSO TIPO

3. TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

(Sottocaso del discorso sul limite di funzioni composte)

È talora utile applicare le seguenti sostituzioni

$\boxed{t=-x}$ oppure $\boxed{t=1/x}$ oppure $\boxed{t=x-a}$

La prima trasforma limiti per $x\to-\infty$ in limiti per $t\to+\infty$; la seconda trasforma limiti per $x\to 0+$ in limiti per $t\to+\infty$ e viceversa; la terza trasforma i limiti per $x\to a$ in limiti per $t\to 0$

Vedi anche pagine succ.

ESEMPI

• $\lim_{x\to 0+} x\ln x = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} =$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{-t} =$

• $\lim_{x\to\pi/3}\frac{3x-\pi}{\operatorname{sen}(x-\pi/3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{t=x-\pi/3}{=} \lim_{t\to 0}\frac{3t}{\operatorname{sen} t} =$

• $\lim_{x\to 0+} x(e^{1/x}-1) = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}(e^t-1) =$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}(1-e^{-t}) =$$

• $\lim_{x\to 0-} x(e^{1/x}-1) \overset{t=-1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}(e^{-t}-1) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t} =$ Qui non c'è indecisione, ma si vede meglio così

• $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x = [\infty-\infty]$ Si può risolvere direttamente. Oppure: $t=-x$

$$= \lim_{t\to+\infty}\sqrt{t^2+2t}-t = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+2t-t^2}{\sqrt{t^2+2t}+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{|t|+t} =$$

$$\underset{\substack{t>0\\ \text{poiché}\\ t\to+\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{t+t} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = [0\cdot(-\infty)] = \boxed{\begin{array}{c}\text{Sostituisco}\\ x=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x}\\ t\to+\infty\end{array}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0^-$$

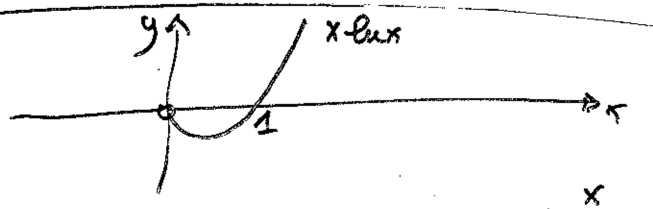
$$\lim_{x\to c} f(x) = l^-$$

"il limite per $x\to c$ di $f(x)$ è l dal di sotto"

se $f(x)<l$ $\quad\forall x\in U(c,\delta)$ intorno di centro c e opportuno raggio δ se c è finito

oppure $\forall x>M$ opportuno se $c=+\infty$

$\forall x<M$ " se $c=-\infty$



$\Rightarrow$ x^x allora che grafico ha?

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \boxed{x=-t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{-t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0^-$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{3x-\pi}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \boxed{\begin{array}{c} x-\frac{\pi}{3}=t\\ 3(x-\pi/3)=3t\end{array}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3t}{\sin t} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(e^{1/x}-1\right) = [0\cdot(+\infty)] = \boxed{\begin{array}{c} t=\frac{1}{x}\\ t\to+\infty\end{array}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left(e^t-1\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

confronto di infiniti

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{<0}\underbrace{\left(e^{1/x}-1\right)}_{<0} = 0\,(0-1) = 0^+$$

se $x<0$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-20x} + x = [\infty - \infty] =$$

$\boxed{t = -x}$ procedura di sicurezza

ERRORI POSSIBILI

(1) $\sqrt{x^2-20x} \sim \sqrt{x^2} = -x$ $\quad \boxed{-x+x=0}$

(2) $\sqrt{x^2} = x \;:\; x \to -\infty \Rightarrow x<0$

$= |x| = -x$

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t^2+20t} - t =$$

$\boxed{a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}}$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\cancel{t^2}+20t-\cancel{t^2}}{\sqrt{t^2+20t}+t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{20t}{|t|+t} = \quad \boxed{t>0}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{20t}{t+t} = 10$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-20x} + x = \text{DIRETTAMENTE}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}-20x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-20x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-20x}{\sqrt{x^2}-x} =$$

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$ poiché visto che $x\to-\infty$ x sarà definitivam. <0

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-20x}{-2x} = 10$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x\cdot\cos x} =$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{\operatorname{tg} x \sim x \quad \text{per } x\to0}$

Dico che per $x \to c$ due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ (entrambe definite in un intorno di c) sono asintotiche se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

per $x \to 0$

$\operatorname{sen} x \sim x$ $\qquad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$(1+x)^t - 1 \sim tx$ ...

perché si usano solo $\cdot$ o divisioni si può sost. a una funz. la sua asintotica per $x \to c$ facendo calcolo $\lim_{x \to c}$ ....

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2} x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\frac{1}{2} x^2 (1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\frac{1}{2} x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} / \frac{1}{2} = 1$$

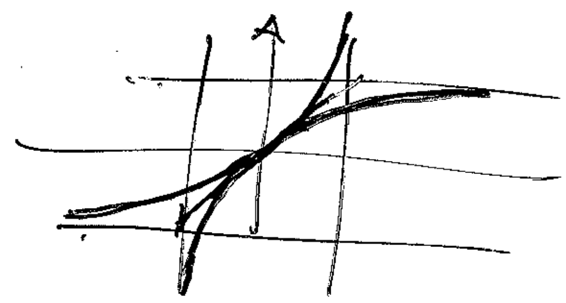
$\Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ se $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

$x = \operatorname{tg} z \qquad z \in (-\pi/2, \pi/2)$ ← Sostituzione

$x \to 0$ per $z \to 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = 1$$



$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x) \ln x}{(\operatorname{sen}(1-x))^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \boxed{\begin{array}{l} t = x - 1 \\ x = 1 + t \\ t \to 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-t \ln(1+t)}{(\operatorname{sen}(-t))^2} =$$

$\operatorname{sen}(-t) \sim -t$
$\ln(1+t) \sim t$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-t \cdot t}{(-t)^2} = -1$$