$\boxed{\text{Esercizi}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^4} = \left[\frac{\cos 0-1}{(\ln 1)^4} = \frac{0}{0}\right] = \boxed{\begin{array}{l} x-1=t \\ x=1+t \\ t\to 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t-1}{[\ln(1+t)]^4} =$$

o con i limiti notevoli o con gli asintotici

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\cos t+1)(\cos t-1)}{(\cos t+1)\,[\ln(1+t)]^4} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\overbrace{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}^{\to 1}\cdot \cancel{t^2}}{(\cos t+1)\underbrace{\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^4}_{\to 1}\cdot \cancel{t^4}\, t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-1}{(\cos t+1)\cdot t^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos t-1 \sim -\frac{t^2}{2} \text{ per } t\to 0 \\ \ln(1+t)\sim t \text{ per } t\to 0 \end{array}}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t^2/2}{t^4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\ln(1+e^x) = [\infty\cdot 0] =$$

visto che $e^x \to 0$ per $x\to -\infty$

$$\ln(1+e^x)\sim e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\infty} -\frac{-x}{e^{-x}} =$$

$$\boxed{-x=t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{e^t} = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = 1$$

$$\frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow e^{1/x}-1 \sim \frac{1}{x}$$

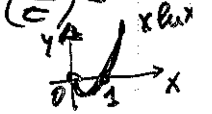
$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x + x^2\ln x}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = 0.0 = 0}$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2 + \overbrace{x\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \boxed{x=\frac{1}{t}} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0^-$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4+x^2+5x}{x^5-4x^3-x} =$$

A	0
B	$+\infty$
C	-5
D	$-\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{-x} = -5$$

l'infinitesimo di ordine superiore è trascurabile rispetto a quello di ord inferiore.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{4/3}+2x^2+5x}{x^5-x^3-x\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{5x\underbrace{\left(1+\frac{1}{5}x^{1/3}+\frac{2}{5}x\right)}_{\to 1}}{-x^{3/2}\underbrace{\left(1+x^{3/2}-x^{7/2}\right)}_{\to 1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{5}{-x^{1/2}} = -\infty$$

o piccolo.

Def. dico che per $x\to c$ (finito o no) la funzione $f(x)$ è "o piccolo" della funz. $g(x)$ se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

: $\boxed{\text{Scrivo } f(x)=o(g(x)) \text{ per } x\to c}$

Nell'es. precedente ho detto che per $x\to 0+$

$x^{4/3}$ è o piccolo di x

x^2 è " " "

$x^{4/3}+2x^2$ è o piccolo di x per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2\cdot x^3-7x^2+2x+3}{4x^2-7x-15} = \left[\frac{2\cdot 27-7\cdot 9+6+3}{4\cdot 9-7\cdot 3-15}\right] \quad \begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

come risolvo la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$?

posso dividere Num e Den per $x-3$ poiché (TEOR Ruffini) il resto della div. di un pol. per $x-3$ è il suo valore in $x=3$.

	2	-7	2	3
3		6	-3	-3
	2	-1	-1	0

Num $= (x-3)(2x^2-x-1)$

	4	-7	-15
3		12	15
	4	5	//

Den $= (x-3)(4x+5)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(2x^2-x-1)}{\cancel{(x-3)}(4x+5)} = \frac{18-4}{12+5} = \frac{14}{17}$$

Esercizi

1. Mostrare che

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ ← svolti venerdì

2. Calcolare:

$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\,\operatorname{sen}(1-x)}{(\ln x)^2}$ (svolto venerdì)

$\lim_{x\to 0+} \frac{2x + x^2 \ln x}{\ln(1+x)}$ (svolto)

$\lim_{x\to 0} \frac{1+2\ln(1-x)}{x^2 - 2e^x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+x}{2(e^x+x)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^4}$ (svolto)

- $\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{tg} 2(3-x)}{x-3}$

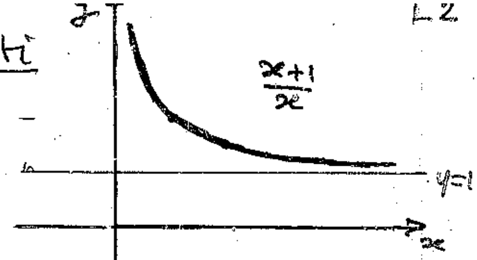
$\lim_{x\to 1/2} \frac{e^{2x-1}-1}{2x^2-x}$

$\lim_{x\to -\infty} x \ln(1+e^x)$ (svolto)

$\lim_{x\to -\infty} x\,(e^{1/x}-1)$ (svolto)

Esempi di calcolo limiti e asintoti

1. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

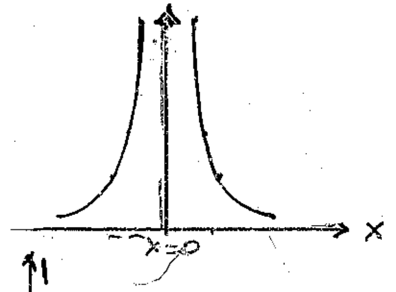


anzi $\frac{x+1}{x}$ tende a 1 dal di sopra

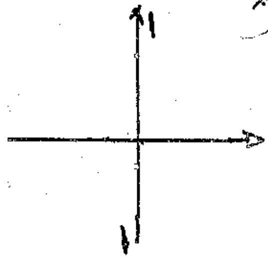
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1+$ $\Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\Rightarrow$ $x=0$ asintoto verticale



3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$



DEF. Limite per x che tende a c (FINITO) da DESTRA (o da SINISTRA) .... [Ricostruire la definizione!]

ES.: $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

DEF. Limite per eccesso (o per difetto) ...
= dal di sopra = dal di sotto

Asintoti: se la funzione tende a comportarsi come una retta:

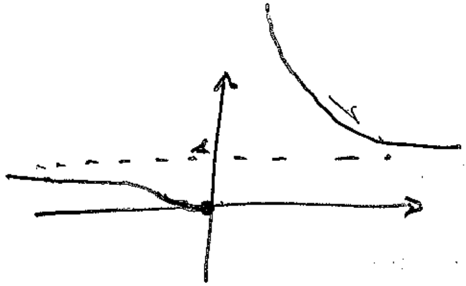
per $x \to c$ finito : se $\lim_{x\to c+} f(x) = +\infty$ (o ... segni assortiti)
ASINTOTO VERTICALE

per $x \to c$ infinito : se $\lim_{x\to c} f(x) = l \neq \infty$: ORIZZONTALE

se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$: ? OBLIQUO

Asintoti verticali:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



anche in questo caso posso dire che la funz. ha asintoto verticale $x=0$ per $x \to 0+$

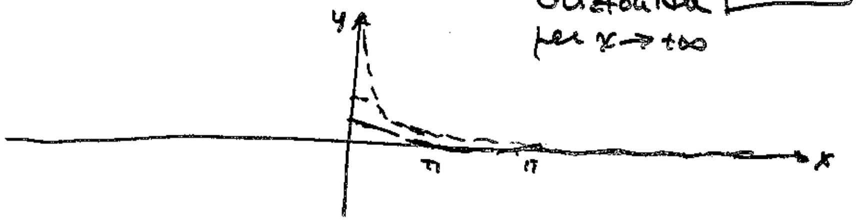
---

orizzontale:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

asintoto orizzontale $\boxed{y=0}$ per $x \to +\infty$



Asintoto obliquo

Può succedere che ci sia solo se si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)$$

[[oppure

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)]]$$

È una <u>retta non parallela a nessuno dei 2 assi</u>

$\Rightarrow$ equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$

e tale che <u>la **distanza** tra</u> il punto $P \equiv (x, f(x))$ del grafico di f

<u>e</u> il punto $Q \equiv (x, mx+q)$ della retta

<u>tenda a</u> 0 quando $x \to +\infty$ [[oppure a $-\infty$]]

Come lo cerco?

(1) Controllo che sia in esame un limite per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$)
se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(2) Controllo che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (o $\lim_{x \to -\infty} f(x)$) sia $+\infty$ oppure $-\infty$
se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(3)(*) Esiste ed è finito $\ell \neq 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (o $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$) ?
se non esiste o non è finito o è $=0$: L'ASINTOTO NON C'È.
Altrimenti chiamo **m** questo limite e passo a:

(4) Esiste ed è finito $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$?
se non esiste o non è finito: L'ASINTOTO NON C'È
Altrimenti chiamo **q** questo limite.
Ho così trovato l'asintoto:

$$y = mx + q.$$

(*) a risposta SÌ a questo punto significa che $f(x)$ ha lo stesso ordine di ∞ di una retta (... cioè ordine 1).

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

per $x \to +\infty$ ha asintoto obliquo?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{2/3} = +\infty$$

e quindi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = \boxed{0}$

non va bene!

$\boxed{\text{NO}}$

$$f(x) = x + \ln x$$

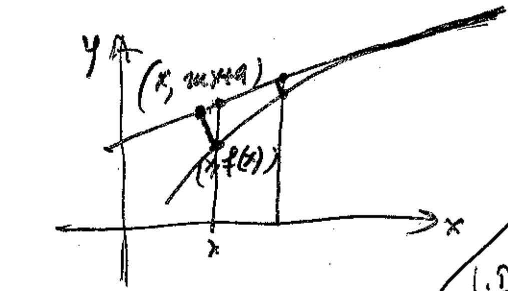
per $x \to +\infty$ ha asint. obliquo?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1 = \boxed{m}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} x + \ln x - x = +\infty$$

NON C'È



Significato grafico dell'asintoto obliquo

I.D. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty}$, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty}$ della funzione $\sqrt{x^2 + x}$ e relativi asintoti se ci sono.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 = m_{+\infty} \\ -1 = m_{-\infty} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x| + x} = \boxed{|x| = x \text{ poiché } x \geq 0}$$

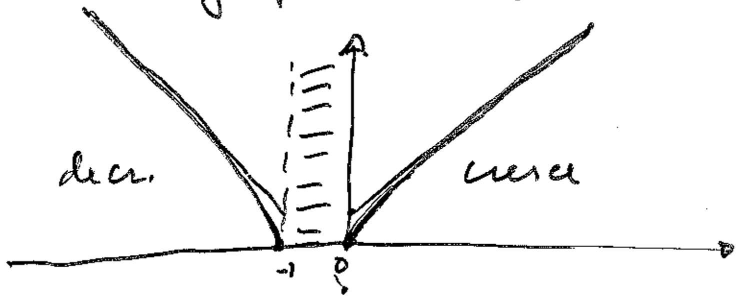
$= \frac{1}{2} \Rightarrow$ l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ ha eq. $\boxed{y = x + \frac{1}{2}.}$

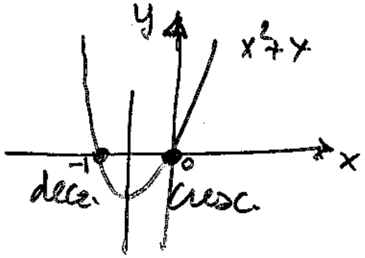
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x| - x} = \boxed{|x| = -x \text{ poiché } x < 0} = -\frac{1}{2}$$

l'asint. obliquo per $x \to -\infty$ ~~ha~~ eq. $\boxed{y = -x - \frac{1}{2}}$

Traccio il grafico di $\sqrt{x^2+x}$





$$y=\sqrt{x^2+x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2+x \\ y\geq 0 \end{cases}$$

porz. parte dell'eq. di una iperbole.

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$$

limiti ed asintoti negli estremi

I.D. $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-x=[\infty+\infty]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|-x}{x}\underset{\boxed{x<0}}{=}-2=m$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-x+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x=[\infty-\infty]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$$

$\sqrt{x^2}=-x$ poichè $x<0$

asintoto obliquo per $x\to-\infty$ ha eq.

$$y=-2x-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|+x}=1$$

per $x\to+\infty$ $f(x)$ ha asintoto orizz. di eq. $y=1$

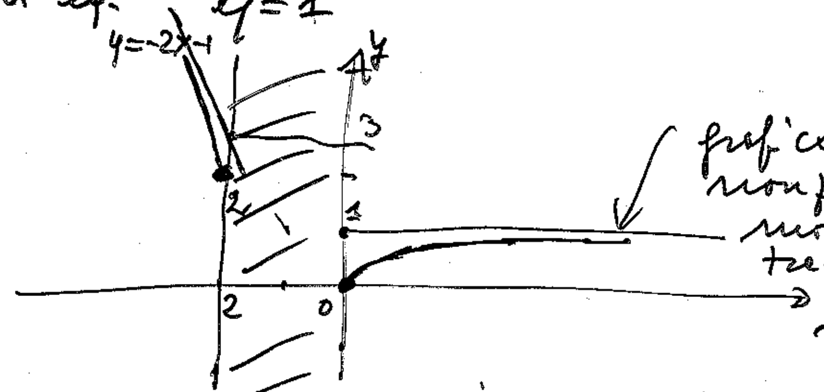


grafico che non potevamo al momento tracciare

Discutiamo almeno il segno di $f(x)$

$\sqrt{x^2+2x}-x\geq 0$? $\boxed{\text{sempre}}$

$\sqrt{x^2+2x}\geq x$: se la funz. è def e $\boxed{x\leq 0}$ (cioè in $(-\infty,-2]$) allora è certamente $\boxed{\text{vero}}$

se $\boxed{x>0}$ quadro: $\begin{cases} \cancel{x^2}+2x\geq \cancel{x^2} \\ x>0 \end{cases}$ $\boxed{\text{sempre}}$