ESERCIZI

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} (2x-\pi)\,\mathrm{tg}\,x = [0\cdot(-\infty)]$$

sostituz.

$t = x - \frac{\pi}{2}$

$x = t + \pi/2$

$$= \lim_{t\to 0+} 2t\ \mathrm{tg}(t+\pi/2) =$$

$\frac{\mathrm{sen}(t+\pi/2)}{\cos(t+\pi/2)} = \frac{\cos t}{-\mathrm{sen}\,t}$

$\mathrm{tg}(t+\pi/2) = \frac{-1}{\mathrm{tg}\,t}$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{-2t}{\mathrm{tg}\,t} = -2$$

---

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sen}\,x)^3}{x-x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x-x^3 = x(1-x^2) = x\underbrace{(1+o(1))}_{\downarrow\ 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sen}\,x)^3}{x} = 0$$

---

Funzioni continue su $[a,b]$

ove $[a,b]$ CHIUSO E LIMITATO

Def. Dico che $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ è <u>continua</u> <u>in</u> $[a,b]$ se è continua in ogni punto $c\in(a,b)$ (cioè $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, $\forall c\in(a,b)$) ed è continua da destra in $a$ (cioè $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$) ed è continua da sinistra in $b$ (cioè $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$)

RICHIAMI DI DEFINIZIONI GIÀ VISTE

FUNZIONI CONTINUE (a, b eventualmente $\infty$)

$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ si dice continua in $c\in(a,b)$ se

$$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c+} f(x)$$

Significa: A PICCOLE VARIAZIONI di $x$ corrispondono PICCOLE VARIAZIONI di $f(x)$.

Si dice continua da sinistra in $c\in(a,b)$ se

$$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$$

Es. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$

Idem da destra: $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$

[redacted]

Tipi di discontinuità

0) ELIMINABILE. Es. $f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$

Ma: $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

1) di prima specie o a salto (modellizzano fenomeni con bruschi salti. Es. $f(x) = [x]$

$\lim_{x\to c-} f(x) \neq \lim_{x\to c+} f(x)$

2) di seconda specie. Es. $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$

$\lim_{x\to c-} f(x)$ oppure $\lim_{x\to c+} f(x)$ non esiste (oppure 1 dei limiti è $+\infty, -\infty$

**ESERCIZI**: in dipendenza da $a \in \mathbb{R}$ si stabilisca se $f(x)$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^4} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{a+2}{a^2+1} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\operatorname{Ch} x} - x & \text{se } x < 0 \\[2ex] a & \text{se } x = 0 \\[2ex] \dfrac{3}{2x^2+3x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} \log x}{1-x} & \text{se } 0 < x < 1 \\[2ex] ax - a^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 2(x-1)}{x-1} & \text{se } x < 1 \\[2ex] 2 & \text{se } x = 1 \\[2ex] \dfrac{e^{x-1} - 1 + (x-1)^a}{\log x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



## Proprietà.

$f, g$ continue in $c$ $\Rightarrow$ $f \pm g$ continua in $c$
$f \cdot g$ " " "
$f/g$ " " " se $g(c) \neq 0$

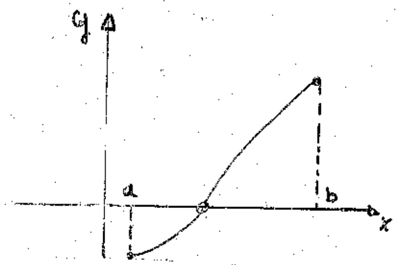
$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } c \\ g \text{ " " } f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continua in $c$.

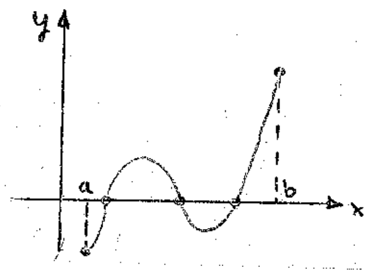
Esempi di funzioni continue (a parte quelle elementari):

- polinomi
- razionali fratte $f(x)/g(x)$ ove $f(x)$ e $g(x)$ sono polin.
- $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

**TEOREMA degli ZERI**. Sia $f$ continua in $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$




Attenzione se esiste più di 1 zero, gli zeri sono comunque in numero dispari.

VEDI PAGINE SUCCESSIVE

Hp. $f$ cont. in $[a,b]$

Teor di limitatezza ed esistenza estr. assoluti (WEIERSTRASS)

Teor degli zeri

$\boxed{\text{Teor dei valori intermedi}}$

La conclusione di questi 3 teoremi sarà che l'immagine mediante una funzione continua su $[a,b]$ dell'intervallo $[a,b]$ è ancora un <u>intervallo</u> <u>chiuso e limitato</u> $[m, M]$ ove $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = MAX_{x\in[a,b]} f(x)$

---

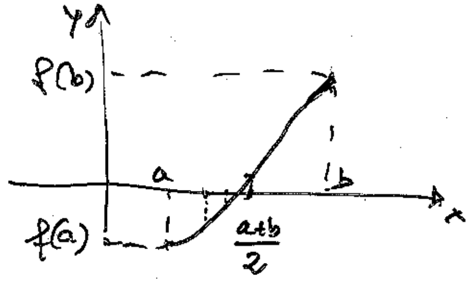
TEOR. ZERI. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita in $[a,b]$ a valori reali.

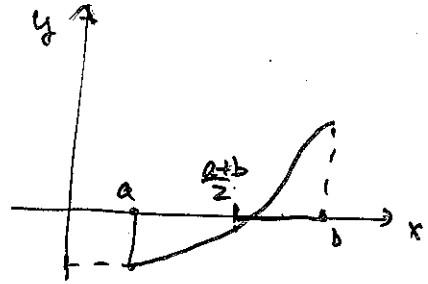
Se $f$ è continua in $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$ ← Hp.

Allora esiste ALMENO un $c \in (a,b)$ tale che $f(c)=0$ ← TS.

Ad ogni punto $c$ che realizza questa situazione dò il nome di ZERO della funzione

Dim. costruttiva con il metodo di BISEZIONE




- Costruisco due successioni di punti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di cui farò vedere che convergono a uno stesso $c$.
- e poi mostrerò che $c$ è davvero uno zero per la funzione

$c_1 = \frac{a+b}{2}$   se $f(c_1)=0$ : ho trovato uno degli zeri cercati e mi fermo perché il teor. chiedeva se ce ne fosse ALMENO 1.

altrimenti vado a vedere il segno di $f(c_1)f(a)$ e $f(c_1)f(b)$ | uno dei due è $<0$

se $f(c_1)f(a) < 0$ pongo $a_1 = a$ $b_1 = c_1$

se $f(c_1)f(b) < 0$ pongo $a_1 = c_1$ $b_1 = b$

Ricomincio la procedura dall'intervallo $[a_1, b_1]$ perché $f(a_1)f(b_1) < 0$

Costruisco $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \Rightarrow$ < $f(c_2)=0$ STOP. / vedo il segno di $f(c_2)f(a_1)$ ecc.

se $f(c_2)\, f(a_1) < 0$ pongo $a_2 = a_1,\ b_2 = c_2$

se $f(c_2)\, f(b_1) < 0$ pongo $a_2 = c_2,\ b_2 = b_1$

prosegue in questo modo, ripartendo da $[a_2, b_2]$ intervallo sul quale per costruzione $f(a_2)\, f(b_2) < 0$ ....

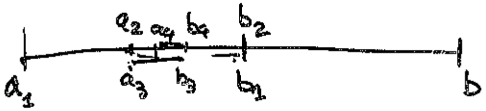
---

Ho due successioni:

$\{a_n\}$ sono gli estremi sinistri degli intervalli

$a_n \geq a_{n-1}$ : MONOTONA NON DECR.

$\{b_n\}$ sono gli estremi destri degli interv.



$b_n \leq b_{n-1}$

MONOTONA NON CRESC.

$a_n < b$ : la ~~succ~~ succ. $\{a_n\}$ è sup. limitata

$b_n > a$ : la succ. $\{b_n\}$ è inf. limitata

$\Longrightarrow$ entrambe convergono

$\{a_n\} \longrightarrow l_1 \qquad \{b_n\} \longrightarrow l_2$

Voglio provare che $l_1 \equiv l_2$

Infatti $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

OSSERVAZIONE

$b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$

$b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$

$\{b_n - a_n\} = \left\{ \dfrac{b-a}{2^n} \right\} \longrightarrow 0$

quindi $\{b_n\} = \{a_n\} + \{b_n - a_n\} \longrightarrow l_1 + 0 = l_2$ ; i 2 limiti sono =

Conclusione della 1ª parte:

le due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite che chiamerò $c$.

$(c = l_1 = l_2)$

2ª) Voglio dimostrare che $f(c) = 0$

$\boxed{f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \qquad \forall n}$

$\{f(a_n)\cdot f(b_n)\}$ ha limite e se sì quale?

f è continua in $[a,b]$ significa che: esiste il $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l) \quad \forall\, l \in (a,b)$

Dire che esiste il limite $\left[\text{ed è } f(l)\right.$ significa che:

$\forall$ successione $\{x_n\} \to l$ si ha

$\{f(x_n)\} \to f(l)$

e $x_n = a_n$ oppure $x_n = b_n$

in particolare se $l = c$ posso dire che

$\{f(a_n)\} \longrightarrow f(c)$

$\{f(b_n)\} \longrightarrow f(c)$ per le proprietà aritmetiche dei limiti:

$\{f(a_n)\cdot f(b_n)\} \longrightarrow (f(c))^2$

TEOR. della PERM. del SEGNO : il limite è $[f(c)]^2 \leq 0$ $\Longrightarrow (f(c))^2 = 0 \Longrightarrow f(c) = 0$ C.V.D.

$f(x) = x^3 - x - 1$ TROVARE GLI ZERI

MA GLI ZERI CI SONO? SÌ

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

fissiamo $M \in \mathbb{R}$ $M > 0$

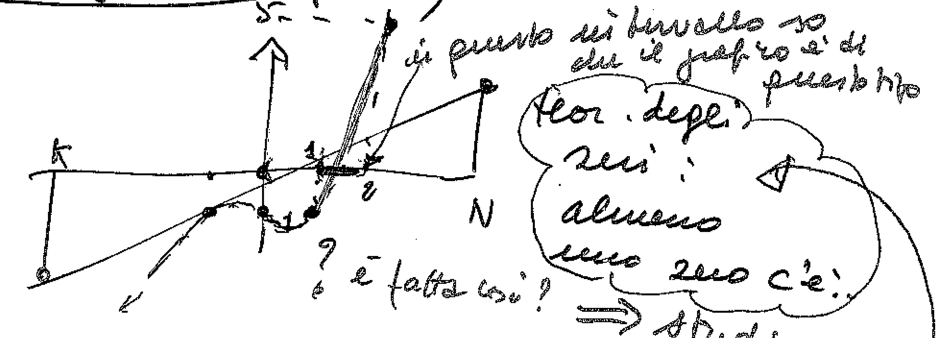
$\to$ esiste un $N > 0$ t.c. $\forall x \geq N$ si abbia $f(x) \geq M$

quindi da un certo N in poi sicuramente la funz. è $> 0$

esiste un $K < 0$ t.c. $\forall x \leq K$ si abbia

$f(x) < -M$

quindi in K si ha $f(K) < 0$ (e per tutti gli $x < K$ pure)




$f(0) = 0 - 0 - 1 < 0$

$f(1) = 1 - 1 - 1 < 0$

$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$

$f(-1) = -1 + 1 - 1 < 0$

punto medio tra 1 e 2 : $\frac{3}{2}$

$f(1) = -1$ $\quad f(2) = 5$ $\quad f(3/2) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{15}{8} - 1 > 0$

quindi lo zero è contenuto nell'intervallo $[1, 3/2]$

calcolo il punto medio: $5/4$

$f(5/4) = \frac{125}{64} - \frac{5}{4} - 1 = \frac{125 - 80}{64} - 1 < 0$

quindi lo zero è contenuto nell'intervallo $(5/4, 3/2)$

calcolo punto medio $\frac{11}{8}$ e $f(\frac{11}{8}) = \ldots$

Non è un metodo rapido per arrivare ad approssimare lo zero.

Per rendere del tutto operativo il metodo bisogna condurre uno studio di funzione che evidenzi quelli che di solito si chiamano

min e MAX relativi.

# minimo e massimo di una funzione.

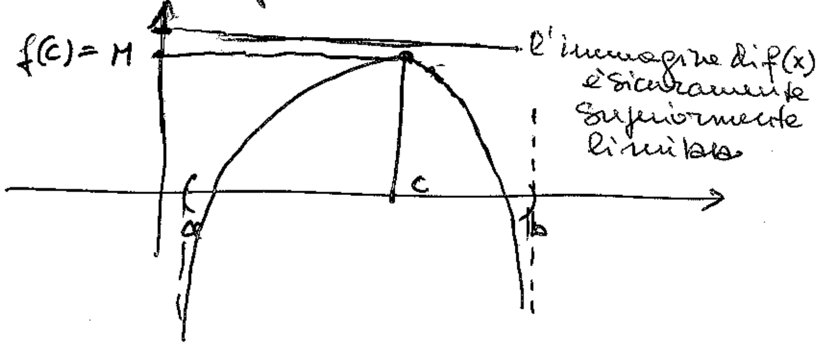
(1) non è detto che ci siano!

(2) Def di massimo assoluto di una funzione.

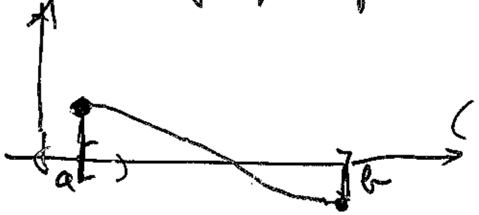
Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($a, b$ eventualmente infiniti)
Dico che $f$ ha un <u>massimo assoluto</u> in $c\in(a,b)$ se

$$\forall x\in(a,b) \text{ risulta } f(x)\le f(c)$$

e chiamo $f(c)$ valore massimo di $f$




Se l'intervallo di def. è chiuso il punto $c$ può anche cadere in uno degli estremi e quindi il grafico può essere come questo

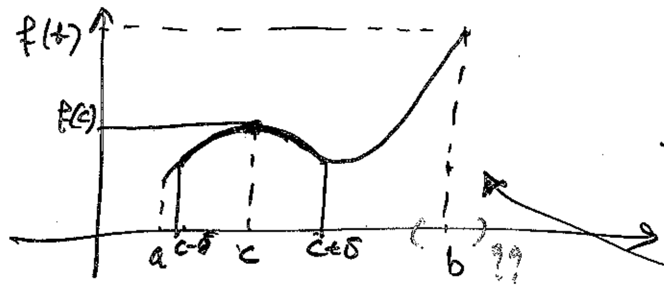



$f(a)$ MAX assoluto
($f(b)$ minimo)

(3) Def di MAX RELATIVO

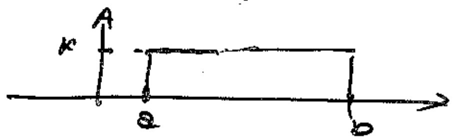
Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Dico che $f$ ha in $c\in(a,b)$ un MAX RELATIVO se esiste un intervallo aperto contenente $c$, della forma $(c-\delta, c+\delta)\subseteq(a,b)$ t.c. per ogni $x\in(c-\delta,c+\delta)$ si abbia

$$f(x)\le f(c)$$




$f(b)$ MAX ASS.
$f(c)$ MAX REL.

- Un MAX ASS. È NECESSARIAMENTE un MAX REL.? NO non sempre (vedi figura) esiste un intorno del punto c di MAX ASS. tutto contenuto in $(a,b)$
- Un MAX REL. NON PUÒ ESSERE MAX ASSOLUTO? NO vedi 2 figure prima,
- Un MAX ASSOLUTO NON PUÒ ESSERE UN MIN. ASSOLUTO? NO




tutti i punti sono di MAX e di min. relativo e assoluto di $(a,b)$
a è punto di min e MAX assoluto
b pure

**TEOR degli ESTREMI** (Weierstrass). $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

$f$ continua in $[a,b]$. Allora

i) $f$ è limitata su $[a,b]$

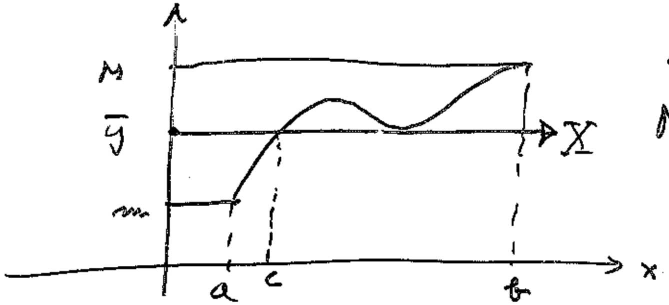
ii) $f$ è dotata di max e min. assoluti

$\Downarrow$ (ii) permette di enunciare questo altro teorema!

**TEOR. dei valori intermedi.** $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$f$ cont. su $[a,b]$

Per ogni $\bar{y}$ compreso tra il minimo $m$ e il massimo $M$ di $f(x)$ esiste un $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \bar{y}$.




$m = f(a_1)$

$M = f(b_1)$

Dimostrazione

$f(x) - \bar{y} = g(x)$ è continua in $[a,b]$

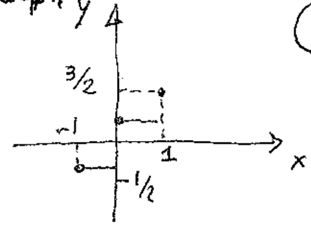
$g(a_1) = f(a_1) - \bar{y} = m - \bar{y} < 0$

$g(b_1) = f(b_1) - \bar{y} = M - \bar{y} > 0$

Applico a $g(x)$ il teor. degli zeri: $\exists$ $c \in [a,b]$ t.c. $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \bar{y} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(c) = \bar{y}$.



**Esempi**



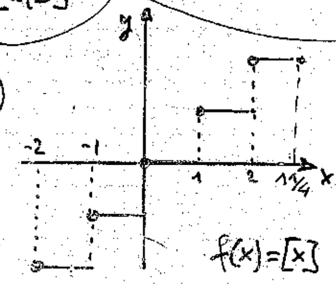

① $f(x) = [x] + \frac{1}{2}$ su $[-1,1]$

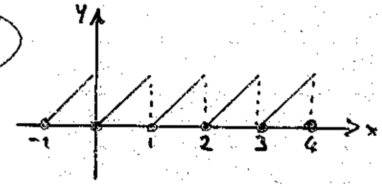
ha $f(-1) = -\frac{1}{2} < 1$, $f(1) = \frac{3}{2} > 1$ ma non ha zeri! Questo perché non è continua in $[-1,1]$.

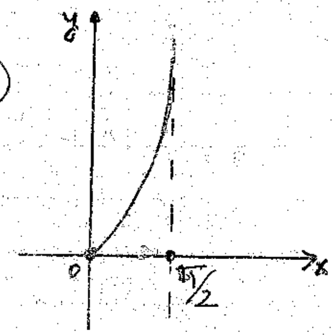
② $\begin{cases} f(x) = [x] \\ x \in [-2, 11/4] \end{cases}$ non ammette valori non interi compresi tra $-2$ e $2$ (vedi figura) (non vale teor. dei valori intermedi) perché $f(x)$ non è cont. in $[-2, 11/4]$

③ $\begin{cases} f(x) = x - [x] \\ x \in [-1,4] \end{cases}$ non ammette MAX assoluti (e la sua opposta non ammette min. assoluti) perché $f$ non è continua in $[-1,4]$

ATTENZIONE. Questi risultati non valgono in generale per funzioni non continue in almeno un punto di $[a,b]$

② 


③ 


⑤ 


Ma anche cade qualche altra ipotesi:

④ $f(x) = x^2$ def. su $\mathbb{R}$ .... ed è continua non è limitata. ($\mathbb{R}$ è non limitato)

⑤ $\begin{cases} f(x) = \tan x \\ x \in [0, \pi/2) \end{cases}$ non è limitata ($[0, \pi/2)$ non è CHIUSO)