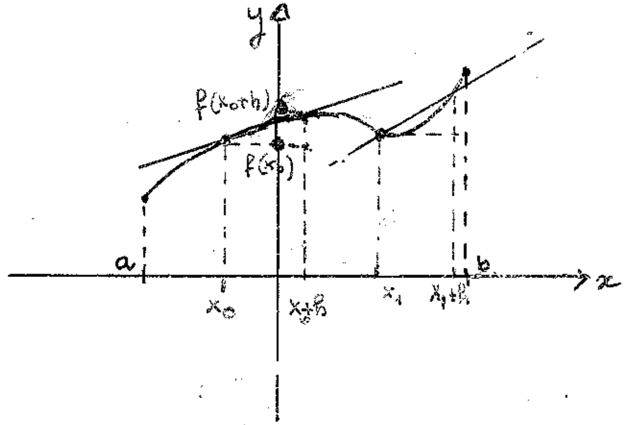
$\boxed{\text{DERIVATA di una funz. } f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ in } x_0 \in (a,b)}$

Problema della VARIAZIONE della variabile dipendente in relazione alla variazione della variabile indipendente



TASSO DI VARIAZIONE MEDIA di $f(x)$ rispetto a x:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Viene anche detto RAPPORTO INCREMENTALE

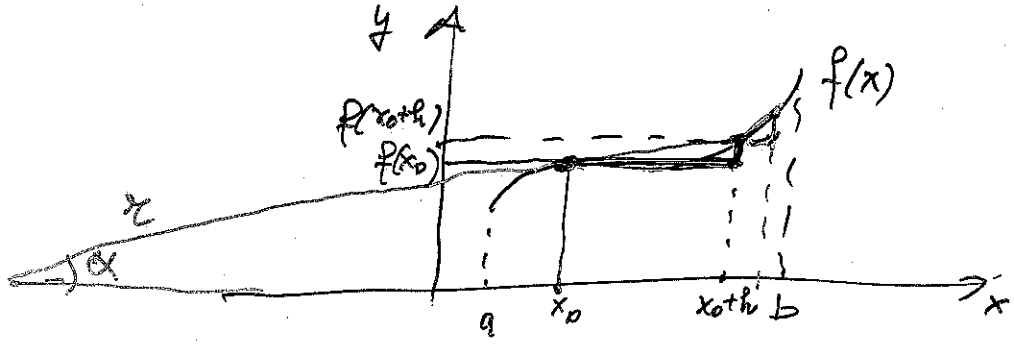
GEOMETRICAMENTE è il coefficiente angolare della retta congiungente $(x_0, f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h))$

Quando h diventa molto piccolo, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ PUÒ RAPPRESENTARE molto bene la pendenza del grafico di $f(x)$ in prossimità di $(x_0, f(x_0))$. PRECISANDO:

se esiste ed è finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si dice che f è derivabile in x_0 e il limite viene detto derivata di f in x_0 e denotato con $f'(x_0)$.

passo da x_0 al punto x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$$

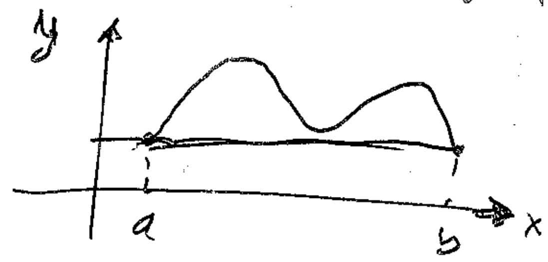


Congiungo $(x_0, f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h))$ e traccio l'istessa retta r

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \underline{m} \quad \text{coeff. angolare di } r$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{tg}\alpha}}$$

pendenza media del grafico



pendenza media $= 0$

DEF. $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (definita in (a,b) a valori reali)

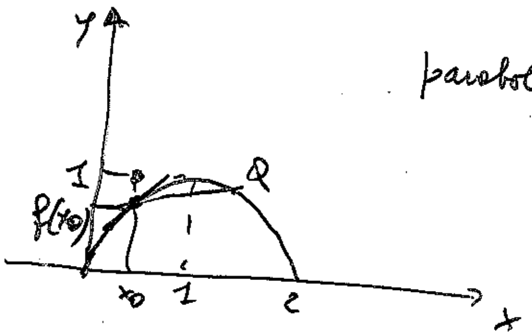
Sia $x_0 \in (a,b)$ e sia $h \in \mathbb{R}$ t.c. $x_0+h \in (a,b)$.

Se esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

chiamo questo numero derivata di $f(x)$ in x_0 — e la denoto $f'(x_0)$ — e dico che f è derivabile in x_0

Geometricamente:

$f(x) = -(x-1)^2+1$



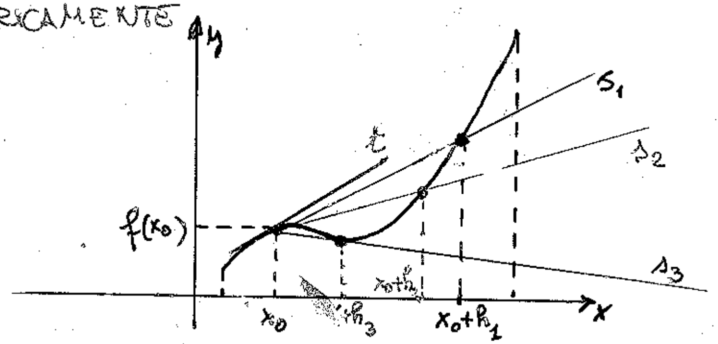
parabola $\begin{cases} y = -(x-1)^2+1 \\ y - f(x_0) = m(x-x_0) \end{cases}$

Risolvente di 2° grado che ha $\Delta \geq 0$

quando $\Delta = 0 \Rightarrow$ ho 1 sola sol. che dicevo — provenendo da una eq. di 2° grado — si dice essere una soluzione doppia.

$\Rightarrow$ geometricamente dico che la retta PQ è tangente alla parabola

GEOMETRICAMENTE



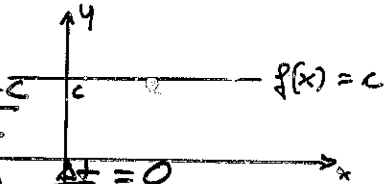
la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta t "TANGENTE" in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di $f(x)$

limite delle secanti passanti per $(x_0, f(x_0))$ e per un altro punto del grafico: sua equazione?

ESEMPI.

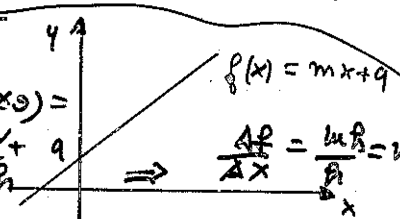
1. $f(x) = c$ ove $c \in \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$

$f(x_0) = c$
$f(x_0+h) = c$ $\quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$



2. $f(x) = mx+q$ $(m, q \in \mathbb{R})$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = m$

$f(x_0) = mx_0+q$
$f(x_0+h) = m(x_0+h)+q$ $\Rightarrow f(x_0+h)-f(x_0) = mx_0 + mh + q - mx_0 - q = mh \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{mh}{h} = m$



3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$ poiché

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x_0+h) - f(x_0) = \sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0}$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0}}{h} = \boxed{\overset{Hp}{x_0 \neq 0}}$$

$$\sqrt[3]{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{\frac{x_0+h}{x_0}} - 1}{h} =$$

$$\sqrt[3]{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x_0} \cdot h} - 1}{x_0 \cdot \frac{1}{x_0} h} = \frac{\sqrt[3]{x_0}}{x_0} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

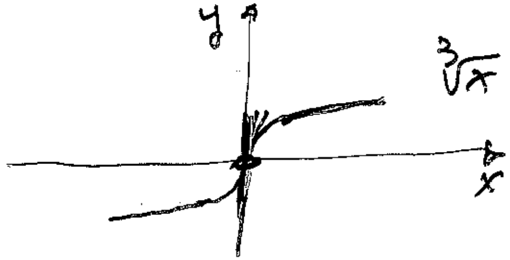
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^t - 1}{x} = t}$$

La derivata esiste certamente se la calcolo in $x_0 \neq 0$

se $x_0 = 0$ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$ la derivata non c'è

perché il limite del rapp. incrementale non è finito.



$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

m non esiste

$\Rightarrow$ la tangente in $(0,0)$ è esattamente l'asse y

$f(x) = |x|$ $\qquad x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} =$$

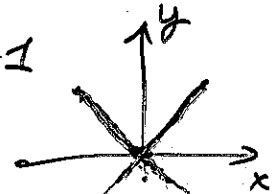
non esiste

se $h \to 0^+$, $h > 0$ $\Rightarrow \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$

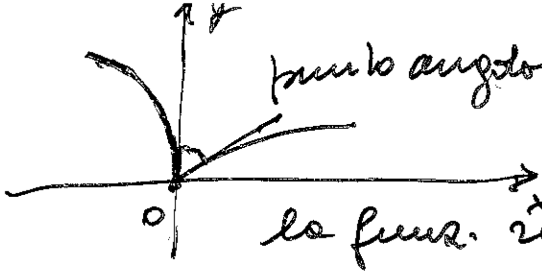
quindi $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$

se $h \to 0^-$, $h < 0$ $\Rightarrow \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$

quindi $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$



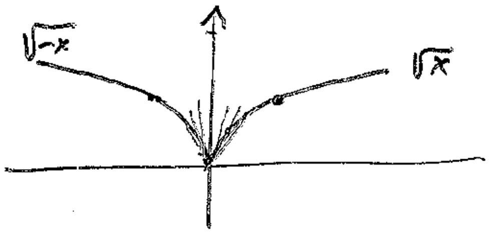
quindi ho un punto angoloso, cioè un punto in cui ci sono 2 "tangenti" che formano un ang.



punto angoloso in $x_0=0$

la funz. rappresentata dal grafico non è derivabile in $x_0=0$.

$f(x)=\sqrt{|x|}$ in $x_0=0$



$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}-\sqrt{|0|}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=$$

$$\boxed{h=(\sqrt{|h|})^2\operatorname{sgn} h.}$$

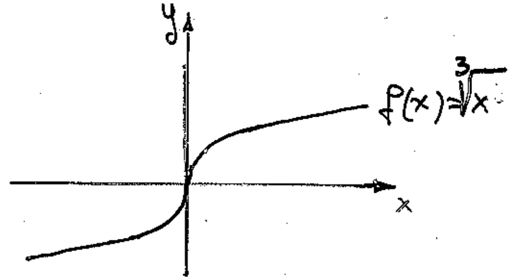
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\operatorname{sgn} h\cdot\sqrt{|h|}}$$

$\boxed{\text{punto di cuspide in } x_0=0}$

$\frac{1}{\sqrt{|h|}}\to+\infty$ se premetto il sgn h tende a $+\infty$ per $h\to 0+$

$-\infty$ per $h\to 0-$

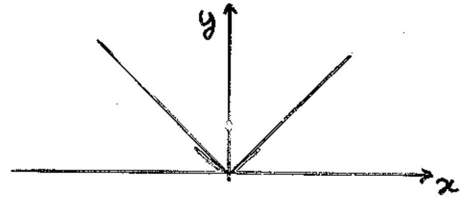
$\Rightarrow$ la tangente esiste, è non una è una coppia di semirette tang. che formano un angolo NULLO



4. $f(x)=|x|$ è derivabile in ogni $x_0\neq 0$ poiché

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & \text{se } h>0\\ -1 & \text{se } h<0\end{cases}$$

non esiste poiché è $\neq$ da DS e da SIN



Derivata destra di $f(x)$ in x_0: esiste se esiste finito

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad : f'_+(x_0)$$

Idem: derivata sinistra

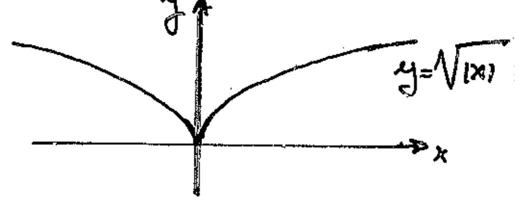
Quindi $|x|$ ha in $x_0=0$ derivata destra e " sinistra } DIVERS

Parlo di punti angolosi.

Invece cuspidi se $\lim_{h\to 0\pm}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ (oppure $\mp\infty$). ESEMPIO

$f(x)=\sqrt{|x|}$

$$\lim_{h\to 0\pm}\frac{\sqrt{|h|}-\sqrt{0}}{h}=\pm\infty$$



REGOLE di CALCOLO

Ingredienti : 1. DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI
2. TEOREMI di DERIVAZIONE

1. DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Denotando con $Df(x)$ la derivata di $f(x)$ si ha:

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (qualunque sia l'esponente α, in ogni x interno all'I.D. della funzione potenza in esame)
- $D e^x = e^x$
- $D \ln x = \frac{1}{x}$
- $D \operatorname{sen} x = \cos x$
- $D \cos x = -\operatorname{sen} x.$

Caso particolare : $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. TEOREMI di DERIVAZIONE

Siano f, g definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$
Se f e g sono derivabili in x_0 si ha

- $D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$
- $D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)$ (*)

Caso particolare : se $g(x) = c$ $\quad g'(x) = 0$

$D(cf)(x_0) = c f'(x_0)$

e quindi : * $D(\log_a x) = D(\log_a e \cdot \ln x) = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$

* derivata di un polinomio ....

(*) Se si pensa che possa valere la formula $D(f g) = Df \cdot Dg$, provare a derivare $x \cdot x$

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Nuovo simbolo per derivata della funzione f

Df ; $\frac{df}{dx}$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$D(e^x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \underbrace{\frac{(e^h - 1)}{h}}_{\to 1} = e^x$$

$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x} h\right)}{x \cdot \frac{1}{x} h} =$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 7$$

$$f'(x) = (2x^3)' - (x^2)' + (5x)' + (7)' =$$
$$= 2(x^3)' - 2x + 5(x)' + 0 =$$
$$= 2\cdot 3x^2 - 2x + 5 = 6x^2 - 2x + 5$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P'(x) = n\cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{\cancel{dy}} \cdot \frac{\cancel{dy}}{dx}$$

Derivata di a^x con $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $a \neq e$

$$F(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "(\,)\cdot \ln a", "f"'] \arrow[rr, bend right, "F"'] & x \ln a \arrow[r, "e^{(\,)}", "g"'] & a^x \end{tikzcd}$$

$f(x) = x \cdot \ln a$
$g(y) = e^y$

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$f'(x) = \ln a$
$g'(y) = e^y$

$$= e^{x \ln a} \cdot \ln a = \boxed{a^x \cdot \ln a}$$

TEOREMA di DERIVAZIONE delle FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ e $g: (c,d) \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq (c,d)$ due funzioni tali che

f sia derivabile in $x_0 \in (a,b)$
g " " in $f(x_0) \in B \subseteq (c,d)$

a, b, c, d eventualmente infiniti

Allora $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e

(*) $$\boxed{D(\underbrace{g \circ f}_{\text{composizione}})(x_0) = g'(f(x_0)) \underbrace{\cdot}_{\text{prodotto}} f'(x_0)}$$

Per ricordarselo provare a scrivere così:

$y = f(x)$ e rappresento $f'(x)$ come $\frac{dy}{dx}$
$z = g(y)$ " $g'(y)$ come $\frac{dz}{dy}$

mentre rappresento $D(g \circ f)$ come $\frac{dz}{dx}$

Allora (*) si rilegge: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

ESEMPI

- Considero $g(y) = \frac{1}{y}$. $\forall y \neq 0$: $g'(y) = \frac{-1}{y^2}$.
  Allora $D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$
  in tutti gli x tali che $f(x) \neq 0$.

- Conseguenza: FORMULA di DERIVAZIONE del RAPPORTO:
  Se $g(x_0) \neq 0$
  $$D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

  Infatti:

VEDI PAG SUCC.

•• In particolare: $D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)_{x=x_0} = D\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$D(\operatorname{tg}x) = D\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) = \frac{(\operatorname{sen}x)'\cos x - \operatorname{sen}x\,(\cos x)'}{\cos^2x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \operatorname{sen}x\,(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2x} =$$

$$= \frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2x} \\ 1+\operatorname{tg}^2x \end{cases}$$

$$D\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{-(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2x} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2x}$$

$F(x) = f(ax)$ ad es. $\operatorname{sen}2x$

$F'(x) = f'(ax)\cdot(ax)' = f'(ax)\cdot a$

$(\operatorname{sen}2x)' = 2\cos 2x$

$(\ln ax)' = \frac{1}{ax}\cdot(ax)' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

$(\ln(-x))' = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$

• Sia f derivabile in x_0 e $a\in\mathbb{R}$. La funzione $f(ax)$ nasce dalla composizione

$$x \xrightarrow{a\cdot(\ )} ax \xrightarrow{f} f(ax)$$

Dunque

$$D(f(ax)) = a\,f'(ax)$$

Casi particolari:

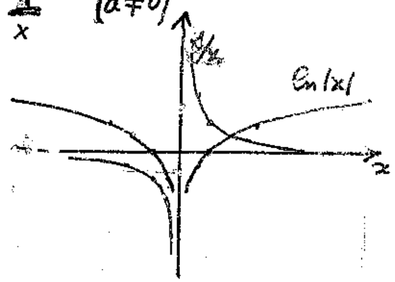
• $D(e^{ax}) = a\cdot e^{ax}$

e quindi

$D(c^x) = D(e^{(\ln c)x}) = (\ln c)\,c^x$

$D(e^{-x}) = -e^{-x}$

• $D(\ln ax) = a\cdot\frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ $(a\neq 0)$



e quindi

$D(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$

e complessivamente

$\rightarrow D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \leftarrow$

... tenerlo presente quando cercheremo una funzione la cui derivata sia $\frac{1}{x}$.

Osservazione: derivando una funzione pari si ha una funzione dispari (e viceversa)

Esercizi. Calcolare le derivate di VEDI PAG SUCC.

1. $\log x - 5x^3 + 4\cos x$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3$
3. $(\log_{10}x)^2$
4. $\operatorname{sen}x\cos x$
5. $\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
6. x^x
7. $(1-x)^{2x}$

$$\left[(\log_{10} x)^2\right]' = \underbrace{2(\log_{10} x)}_{g'(f(x_0))} \cdot (\log_{10} x)' =$$

$$\boxed{x \xrightarrow{\log_{10}} \log_{10} x \xrightarrow{(\,)^2} (\log_{10} x)^2}$$

$$= 2\log_{10} x \cdot \frac{1}{x \ln 10}$$

$$(\operatorname{sen} x \cos x)' = (\operatorname{sen} x)'\cos x + \operatorname{sen} x(\cos x)' =$$

$$= (\cos x)^2 - (\operatorname{sen} x)^2$$

oppure $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

e quindi

$$(\operatorname{sen} x \cos x)' = \frac{1}{2}(2\cos 2x) = \cos 2x$$

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})' =$$

$$x \longmapsto x\ln x \xmapsto{e^{(\,)}} x^x$$

$$= e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^x(\ln x + 1)$$

qualche derivata:

$D(x^2 \operatorname{tg}\sqrt{x})$

$D(x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x-1})$

$D \ln(f(x))$

$$D\log(2e^x+3) = \frac{1}{2e^x+3}\cdot 2e^x$$

$$D\sqrt{2x^2+x+3} = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+3}}$$

$$D\,\frac{\sqrt{x}}{\log x + x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\log x + x) - \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}{(\log x + x)^2} =$$

$$= \frac{\log x + x - 2x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{2\sqrt{x}\,(\quad)^2} = \frac{\log x - x - 2}{2\sqrt{x}\,(\quad)^2}$$

$$D\,\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} = \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}g(x) - g'(x)\sqrt{f(x)}}{g(x)^2} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - 2g'(x)f(x)}{2\sqrt{f(x)}\;g(x)^2}$$

$$D\,\frac{f(x)^\alpha}{g(x)} = \frac{\alpha f(x)^{\alpha-1}f'(x)g(x) - f(x)^\alpha g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$= f(x)^{\alpha-1}\,\frac{\alpha f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$D\,\frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\beta} = f(x)^{\alpha-1}g(x)^{\beta-1}\,\frac{\alpha f'g - \beta f g'}{g^{2\beta}} = \frac{f^{\alpha-1}}{g^{\beta+1}}(\alpha f'g - \beta$$

$$D\left(\log\sqrt{x^2-3x} + 2^{x^2}\right) = D\left(\frac{1}{2}\log(x^2-3x) + 2^{x^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2x-3}{x^2-3x} + 2x\cdot 2^{x^2}\cdot\log 2$$

$$D\log_2 x = D\log_2 e\,\log_e x = \frac{\log_2 e}{x}$$