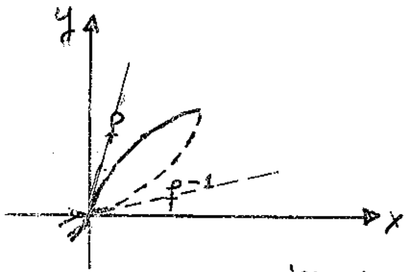
TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA.

Sia $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ (a, b eventualmente infiniti)
ed esista la funzione inversa: $f^{-1}: B \to (a,b)$.

Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$
e $f'(x_0) \neq 0$
allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$\left(D f^{-1}\right)_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



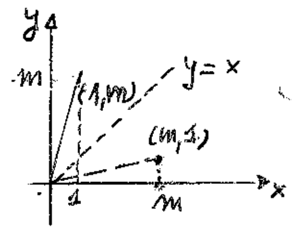
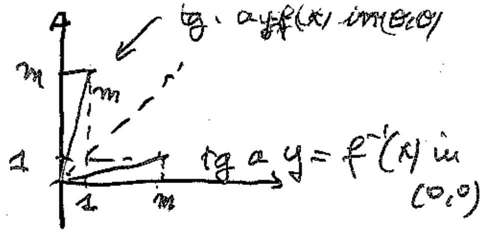


illustrazione con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

meglio ricalto con $m = f'(x_0)$



$\frac{1}{m}$ coeff. ang. della tg in (0,0) a $y = f^{-1}(x)$ sarà $\frac{1}{m}$

$f^{-1} \circ f(x) = id(x)$ calcolo la derivata in $x = x_0$

$$\left(f^{-1}\right)'_{y_0 = f(x_0)} \cdot f'(x_0) = 1$$

$$\left(f^{-1}\right)'_{y_0 = f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

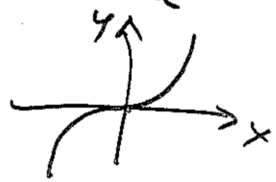
Se $f'(x_0) = 0 \ldots$
vedi $y = x^3$ e la sua inversa $x = \sqrt[3]{y}$

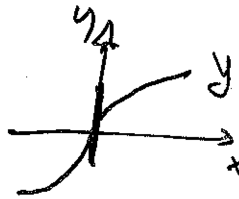
Se $f'(x_0) = 0$, $\frac{1}{f'(x_0)}$ non ha senso

Non c'è la derivata ma c'è la tangente ed è verticale

$f(x) = y = x^3$

$f'(x) = 3x^2$
$f'(0) = 0$





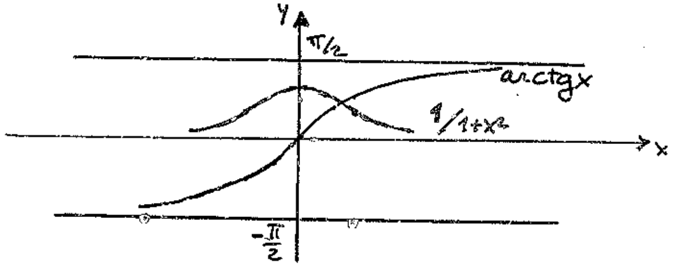
ATTENZIONE: così formulato il teorema va bene per calcolare i singoli valori della derivata.
Se vogliamo la "funzione derivata di $f^{-1}(y)$" serve ricondurre a y la variabile che compare al 2° membro : $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Esempio : $y = \operatorname{tg} x$ è invertibile tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ dà
$x = \operatorname{arctg} y$.

$$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \underbrace{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}}_{\text{funzione in } x!} = \frac{1}{1+y^2}$$

Riesprimendo anche la funzione inversa nella variabile x abbiamo

$$D(\text{arctg}\, x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



- Similmente

sen: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è invertita da arcsen, cioè

$y = f(x) = \text{sen}\, x \quad e \quad x = f^{-1}(y) = \text{arcsen}\, y$

$$\Rightarrow D\,\text{arcsen}\, y = \frac{1}{D(\text{sen}\, x)_{x=\text{arcsen}\, y}} = \frac{1}{(\cos x)_{x=\text{arcsen}\, y}} = ?$$

se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\text{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D\,\text{arcsen}\, y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\text{arcsen}\, x)'$ è def. su $(-1,1)$

- Similmente

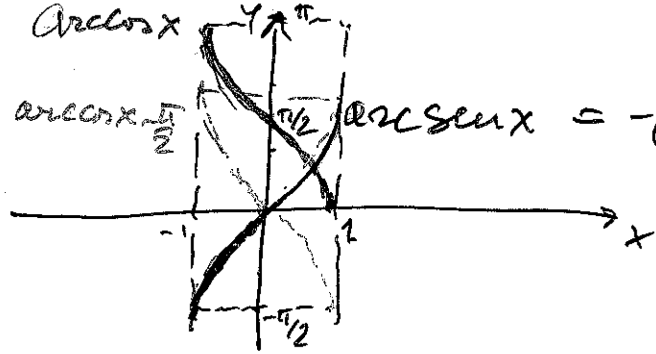
cos: $[0,\pi] \to [-1,1]$ è invertita da arccos, cioè

$y = f(x) = \cos x \quad e \quad x = f^{-1}(y) = \arccos y$

$$\Rightarrow D\arccos y = \frac{1}{D(\cos x)_{x=\arccos y}} = \frac{-1}{(\text{sen}\, x)_{x=\arccos y}} = ?$$

se $x \in [0,\pi]$, $\text{sen}\, x \geq 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D\arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\arccos x)'$ è def su $(-1,1)$



$$\text{arcsen}\, x = -\left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right)$$

per forza $D(\arccos x) = -D(\text{arcsen}\, x)$!

ALCUNI COMMENTI

1°) $f'(x)$ ha senso? che senso ha?

Suppongo che $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ sia derivabile in ogni punto $x_0 \in (a,b)$.
Posso associare ad ogni $x_0 \in (a,b)$

$x_0 \longmapsto f'(x_0)$ NUMERO

Resta così definita una funzione

$f': (a,b) \to \mathbb{R}$

che chiamo <u>funzione derivata</u>.

Guardo quei 2 grafici.

2ª) La derivata di una funz. dispari è una funz. pari (pari ... dispari)?

SÌ PERCHÉ:

Hp: se $\forall x \in$ I.D. $f(-x) = -f(x)$: Funz dispari

Supponiamo che in ciascun $x \in$ I.D. la f sia derivabile. Applico il teor. di derivaz. delle funz composte al 1° membro dell'uguaglianza e le regole aritm. di derivaz al 2° membro:

$$-1 \cdot f'(-x) = -1 \cdot f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f' \text{ PARI : TS}$$

Hp: se $\forall x \in$ I.D. $f(-x) = f(x)$: Funz pari

... derivabile ...

$$-1 \cdot f'(-x) = f'(x)$$

$$f'(-x) = -f'(x) \quad \text{: Funz dispari : TS}$$

Esercizio di derivazione

$$\left(\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' =$$

$f(x) = 1-2x^2$
$g(y) = \sqrt{y}$ $g' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
$(g \circ f)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$\boxed{\frac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}}} + \frac{-(\sqrt{1-x})'}{(1-x)}$$

$$\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} - \frac{\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2(1-x)^{3/2}}$$

Spiegazione della derivata del 2° addendo: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\left((1-x)^{1/2}\right)'}{1-x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-x)^{1/2-1} \cdot (1-x)'}{1-x} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-1/2}}{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$

Spiegazione della derivata della radice quadrata:

$$D(\sqrt{y}) = D(y^{1/2}) = \frac{1}{2} y^{1/2-1} = \frac{1}{2} y^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2y^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

LEMMA FONDAMENTALE

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f derivabile in $x_0 \in (a,b)$.

Allora posso scrivere

$\forall x = x_0 + h \in (a,b)$

$$* \quad \boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)}$$

addendo tale che se lo divido per h e faccio tendere h a 0 ho limite 0

Dim.

f è derivabile in x_0:

esiste finito $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Applico i teor. sul calcolo dei limiti

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h}{h} = 0$$

cioè il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore risp. al denom.

cioè $N = o(D)$

$$* \quad f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h = o(h) \qquad \text{C.V.D.}$$

Applico il lemma fondamentale alla dimostr. della continuità delle funz. derivabili. (VEDI ENUNCIATO TRA 2 PAGINE)

Hp. $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ deriv. in $x_0 \in (a,b)$

TS f è continua in x_0

Cioè:

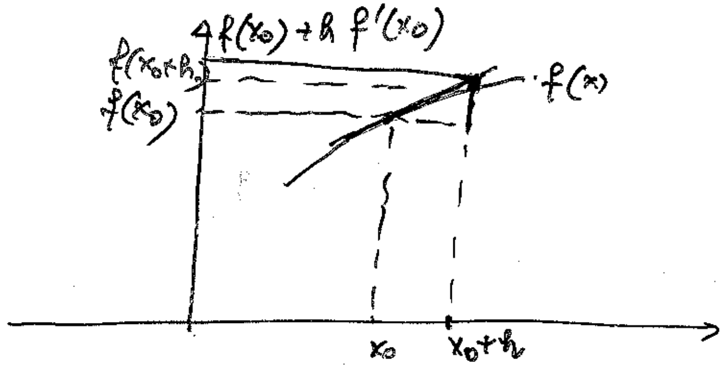
TS $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dim. $x = x_0 + h$ (sostituisco)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \underset{L.F.}{=} \lim_{h\to 0} f(x_0) + \underbrace{h f'(x)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{o(h)}_{\downarrow\, 0}$$

$$= f(x_0)$$

C.V.D.



$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0) + o(h)$$

VEDI SPIEGAZIONE PAG SEGUENTE

Esercizio (per motivare le ultime affermazioni):

calcolare l'eq. della retta tangente nel punto di ascissa $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = e^x$.

SVOLGIMENTO

Il punto sul grafico che ordinata ha? $f(x_0)$ (se x_0 è l'ascissa)

il coeff ang. della tangente qual è? $f'(x_0)$

Quindi $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)}$ ← equazione della retta tangente

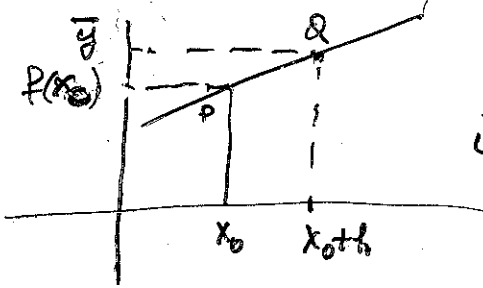
$f(1) = e^1 = e$

$f'(x) = e^x \qquad f'(1) = e^1 = e$

$$y - e = e\,(x-1)$$

$$\boxed{y = ex}$$

retta tg al grafico



$Q = (x_0 + h, \bar{y})$

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x_0+h-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,h$$

Quindi nella formula del lemma fondamentale la parte $f(x_0) + f'(x_0)h$ misura l'ordinata del punto sulla tangente a $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ corrisp. al punto di ascissa x_0+h

eq. di una retta passante per (x_0, y_0) e di coeff. ang m si calcola così. Ha certamente la forma

$$y = mx + q$$

passa per (x_0, y_0) e quindi

$$y_0 = mx_0 + q$$

sottraggo questa uguaglianza dalla 1ª

$$y - y_0 = mx - mx_0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Se il coeff. angolare è $m = f'(x_0)$ viene l'equazione scritta a lato

SPIEGAZIONE A RICHIESTA

Dunque la formula

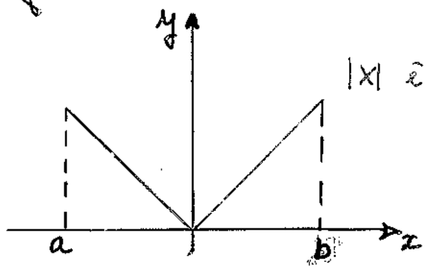
$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)$$

dice che il valore della funzione nel punto variato x_0+h, se f è derivabile in x_0, può essere approssimato con il valore calcolato lungo la tangente al grafico di $y=f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ nello stesso punto x_0+h e questa approssimazione è sempre migliore quanto più piccolo è h, poiché la parte che si trascura ($o(h)$) è "molto più piccola di h".

DERIVATE E CONTINUITÀ. Ho provato che

- Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in $x_0\in(a,b)$ allora $f(x)$ è continua in x_0.

Il viceversa è falso



DERIVATE ED ESTREMI RELATIVI

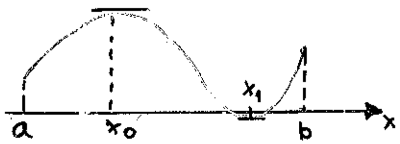
- Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ha in $x_0\in(a,b)$ un punto di massimo relativo (interno ad (a,b)) e f è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0)=0$$

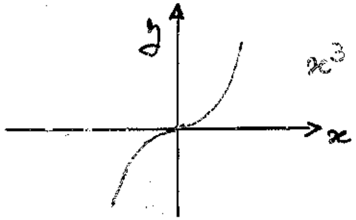
Idem se x_2 è un punto di minimo relativo

(Sul testo: ESTREMI LOCALI)

TEOR. DI FERMAT



ATTENZIONE: il viceversa è falso



$x_0=0$ è un punto a tangente stazionaria MA non estremo locale

Dim. FERMAT

x_0 sia un punto di max relativo

$\exists$ intorno $U=(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset(a,b)$ t.c. $\forall x\in U$

$$f(x)\le f(x_0).$$

La f è derivabile in x_0; quindi esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Che segno ha?
Che segno ha la funzione dipendente da h che ho all'interno del simbolo di lim

$\boxed{h>0}$: $f(x_0+h)-f(x_0)\le 0$

$$\frac{N\le 0}{D>0}\le 0$$

$\lim_{h\to 0} = 0$

$\boxed{h<0}$: $f(x_0+h)-f(x_0)\le 0$

$$\frac{N\le 0}{D<0}\ge 0$$

ma $\exists \lim_{h\to 0}$

quindi $\lim_{h\to 0^+}=\lim_{h\to 0^-}$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0^+$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0^+$$

Conseguenza finale del teor. della perm. del segno

$-|x|$ ha nell'origine un max relativo e assoluto ma non ha derivata

$\Rightarrow$ non ha tang orizzontale nell'origine.

Quindi:

- Se la funzione ha un estremo relativo in x_0 non è detto che sia derivabile in x_0 e quindi nulla possiamo dire a priori sulla retta tangente
- Se la funzione è derivabile con derivata nulla in $x = x_0$ non è detto che in x_0 abbia un estremo relativo

Potrebbe anche non avere neppure un punto di flesso come succede con la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che in $x=0$ è derivabile:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(h+0)^2 \sin 1/(h+0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} =$$

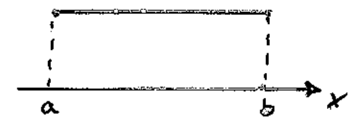
$$= \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \quad \text{poiché } \left|\sin \frac{1}{h}\right| \leq 1 \text{ e } h \to 0.$$

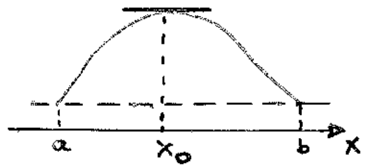
ma cambia concavità infinite volte in prossimità di $x = 0$ e quindi non ha un flesso.

Però

- TEOR. di ROLLE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$, sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = 0$$

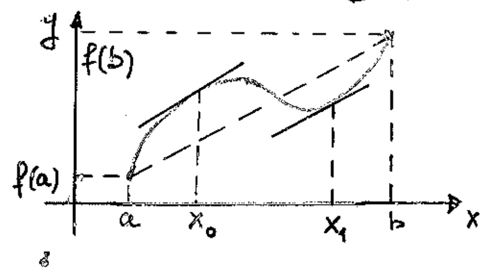




Più in generale

- TEOREMA di LAGRANGE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Provare con $f(x) = x^2$ o $f(x) = \frac{1}{x}$

Se ne deduce il test di monotonia e il metodo per la ricerca di massimi e minimi locali.