LAGRANGE: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Hp: se f è continua in $[a,b]$

è derivabile in (a,b)

Ts allora esiste $x_0\in(a,b)$ t.c.

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

($\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il rapporto incrementale al passaggio dal punto $(a,f(a))$ al punto $(b,f(b))$)

Per dimostrarlo vado prima a dimostrare un caso particolare (TEOR ROLLE)

Hp se $f(a)=f(b)$ e valgono le ip. del TEO di LAGR.

TS. $\exists x_0\in(a,b)$ t.c. $f'(x_0)=0$

Dim. f è continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ vale T. di WEIRSTRASS: f in $[a,b]$ ha minimo e MAX assoluti.

1° caso può darsi che il minimo E il MAX cadano entrambi negli estremi di $[a,b]$, ad es.

$f(a)=\min$ $\quad f(b)=\mathrm{Max}$

Allora $\forall x\in[a,b]$: $f(a)\le f(x)\le f(b)$

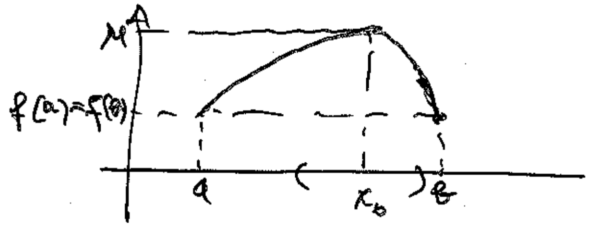
Ma per ipotesi $f(a)=f(b)\Rightarrow f(x)=f(a)$ è costante

Quindi $f'(x)=(f(a))'=0$ $\quad\forall x\in(a,b)$

Come punto x_0 posso scegliere 1 qualunque dei punti di (a,b)

2° caso almeno uno tra il min. e MAX assoluti non cade negli estremi di $[a,b]$.

Sia ad es. il MAX.

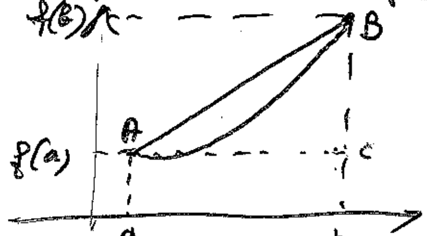


In questo caso il MAX assoluto è anche MAX relativo poiché esiste tutto un intorno di x_0 della forma $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ contenuto in (a,b).

Quindi visto che f è derivabile in $x_0\in(a,b)$ posso applicare il TEOR di FERMAT

$f'(x_0)=0$ $\qquad$ c.v.d. TEOR ROLLE

Prosegue dim. Teor di Lagrange



equaz. della retta per $A=(a,f(a))$, $B=(b,f(b))$:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Considero la funzione

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

e la funzione

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$$\begin{cases} h(a)=h(b)=0 \\ h(x) \text{ è continua in } [a,b] \\ h(x) \text{ è derivabile in } (a,b)\end{cases}$$

Applico il teor. di ROLLE alla funz. $h(x)$. Esiste $x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$h'(x_0) = 0$$

$$\| $$

$$h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Quindi in x_0 si ha

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

cioè

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

CVD Lagrange.

Esempio

$f(x) = \frac{1}{x}$ $[a,b]$ con $0<a<b$.

Dov'è x_0?

Per quale x si ha che

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = \frac{1/b - 1/a}{b-a} \quad ?$$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{a-b}{ab(b-a)} \qquad a-b \neq 0 \implies$$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{ab} \implies x^2 = ab$$

$$\implies x_0 = \sqrt{ab}$$

con segno positivo poiché $a < x_0 < b$

CONSEGUENZE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, cont. in $[a,b]$ deriv. in (a,b)

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\boxed{\text{Tesi}}$ è che $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

se $x_1 < x_2$ anche $f(x_1) < f(x_2)$

Dim: la tesi si può rileggere

se $x_2 - x_1 > 0$ allora $f(x_2) - f(x_1) > 0$

applico il teor. di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$

$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

cioè

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$$

$$\Downarrow$$

$$>0$$

c.v.d.

Con la stessa dimostrazione e con l'ipotesi $f'(x) < 0 \implies f(x_2) - f(x_1) < 0$ se $x_2 > x_1$

Con l'ipotesi $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

$\implies f(x)$ è costante

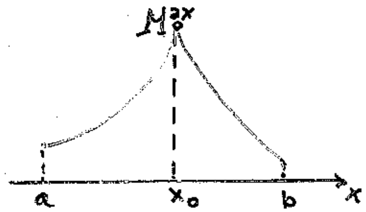
e QUINDI!

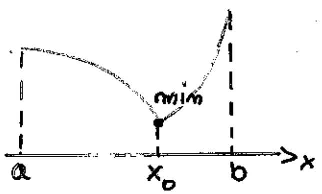
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

- Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è crescente in (a,b) $(*)$
- Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è decrescente in (a,b)
- Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è costante in (a,b)

$$\Downarrow$$

- Se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$
  in x_0 c'è un MASSIMO RELATIVO
- Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$
  in x_0 c'è un MINIMO RELATIVO





Altra conseguenza, sulle primitive

Definizione di funzione primitiva.

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
Dico che $F(x)$ è una primitiva di f su (a,b) se per ogni punto $x \in (a,b)$ la $F(x)$ è derivabile e risulta

$$F'(x) = f(x).$$

So che se $G(x) = F(x) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$
allora $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x)$

Quindi se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su (a,b) anche $G(x) = F(x) + c$ lo è.

Viceversa mostro che:

se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive su (a,b) della stessa funzione $f(x)$ allora differiscono per una costante, cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$G(x) - F(x) = c.$$

Dim. Considero $G(x) - F(x)$. La sua derivata su (a,b) è $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
Visto che la derivata di $G(x) - F(x)$ è $= 0$ $\forall x \in (a,b)$ se G ed F sono cont. (deriv. [illegible]...) il teorema Lagrange permette di dire che, $G(x) - F(x) = c$ $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

Studi di funzione.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}.$$

① I.D. $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$

$E = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

② Calcolo dei limiti negli estremi dell'I.D.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ asintoto orizz. $y=1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{\underbrace{(x-2)\cdot 4}_{\to 0^+}} = +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ asintoto verticale $x=2$

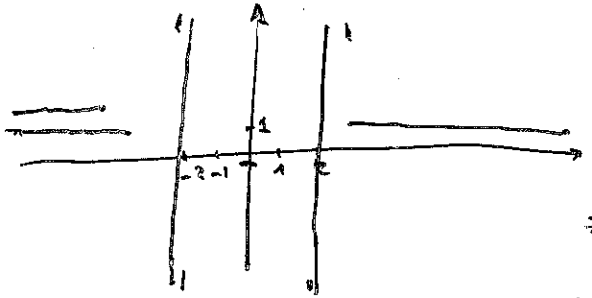
$f(x)$ è funzione pari $f(-x)=f(x)$

$\Rightarrow$ il grafico è simmetrico risp. asse y.

Ne deduco che

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ asintoto vert $x=-2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ asint. orizz. $y=1$



③ Monotonia

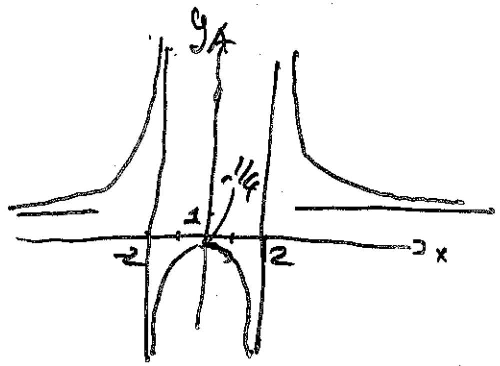
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+1)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x(-4-1)}{(x^2-4)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in E \\ x<0\end{cases}$$

quindi $f'(x)\ge 0$ se $x\in(-\infty,-2)$ e se $x\in(-2,0)$

$f'(x)<0$ se $x\in(0,2)$ e se $x\in(2,+\infty)$



$f(0)=-\frac{1}{4}$

$f(x)$ cresce in $(-2,0)$
decresce in $(0,2)$

$f(x)$ è def in $x=0$

$\Rightarrow x=0$ è pto di max relativo

in $(-\infty,-2)$ $f(x)$ cresce

in $(2,+\infty)$ $f(x)$ decresce

$f(x) = -2x + \ln(e^x-4)$ Studiarla.

I.D. $e^x>4 \Rightarrow x>\ln 4$ $\quad (\ln 4,+\infty)=E$

$\lim_{x\to(\ln 4)^+} f(x) = -\infty$ asintoto verticale $x=\ln 4$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x+\ln(e^x) = \lim_{x\to+\infty} -2x+x =$

$= \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ esiste un asintoto obliquo?

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x} = -1 = m$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim_{x\to+\infty} -x+\ln(e^x-4) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln e^{-x} + \ln(e^x - 4) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + 4e^{-x}) = 0$$

L'asintoto ha equazione $y = -x$

Monotonia

$$f'(x) = (-2x + \ln(e^x - 4))' =$$

$$= -2 + \frac{1}{e^x - 4} \cdot (e^x - 4)' =$$

$$= -2 + \frac{e^x}{e^x - 4} = \frac{-e^x + 8}{e^x - 4} > 0$$

in $E = (\ln 4, +\infty)$ il denominatore > 0

e quindi $f'(x) > 0 \iff \begin{cases} x \in E \\ -e^{x} + 8 > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x > \ln 4 \\ x < \ln 8 \end{cases}$$

$f(x)$ cresce in $(\ln 4, \ln 8)$

$f(x)$ decresce in $(\ln 8, +\infty)$

MAX rel in $x = \ln 8$

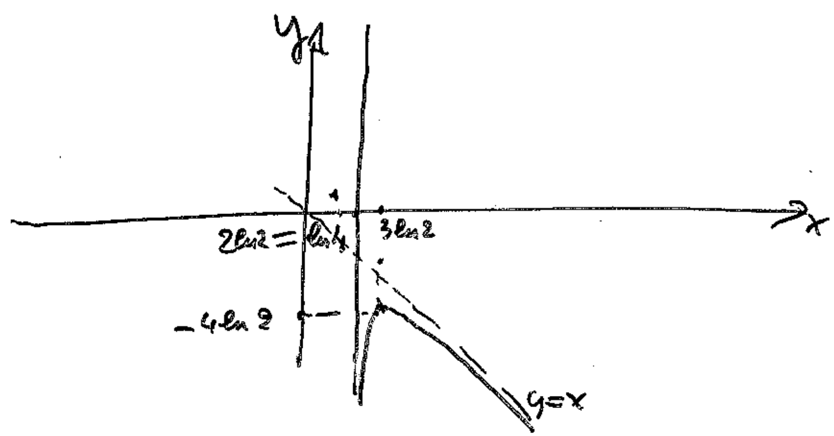
Valore del max

$f(\ln 8) = -2\ln 8 + \ln 4 =$

$= -6\ln 2 + 2\ln 2 =$

$= -4\ln 2.$

Grafico ?



Lo studio fatto evidenzia che la funzione è sempre negativa.

Inoltre, visto che in $(\ln 4, \ln 8)$ cresce e in $(\ln 8, +\infty)$ decresce, il MASSIMO oltre che relativo è anche assoluto in quanto $\forall x \in E$ risulta

$$f(x) \leq f(\ln 8)$$