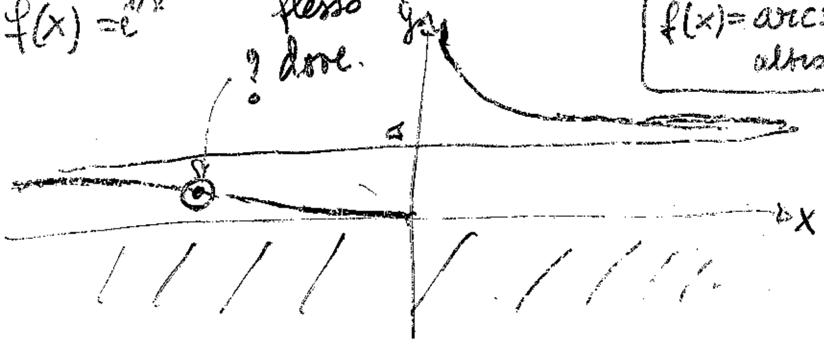
$f(x) = e^{1/x}$ flesso ? dove.



$f(x) = \arcsin 1/x$ altro esempio

I.D. $\mathbb{R}$. $f(x) > 0$ sempre

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1^{\pm}$ asintoto orizz. $y=1$

$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ " vert. $x=0$

$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0^+$

f è decresc. in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$ in quanto composta di una decresc. nei 2 intervalli e di una crescente.

Per capire come $e^{1/x} \to 0^+$ per $x \to 0^-$ ho bisogno della derivata.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot e^{1/x} < 0 \qquad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x^2} e^{1/x} = [-\infty \cdot 0] = \boxed{t = \frac{-1}{x}} \quad x = -\frac{1}{t}$$

$$\lim_{t \to +\infty} -t^2 \cdot e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{t^2}{e^t} = 0$$

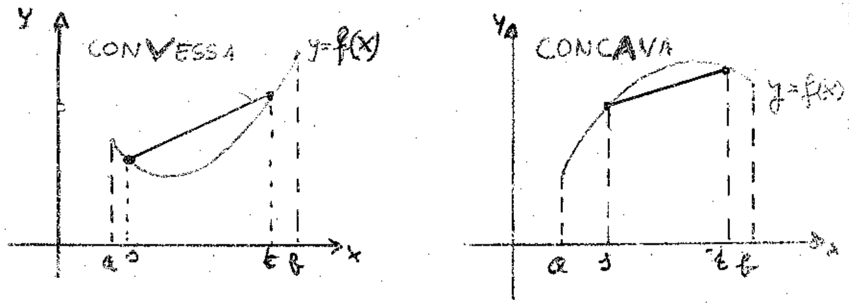
Tenuto conto di questo e dell'asintoto per $x \to -\infty$ si capisce che c'è un flesso.

Ancora uso del teor. di Lagrange e sue conseguenze

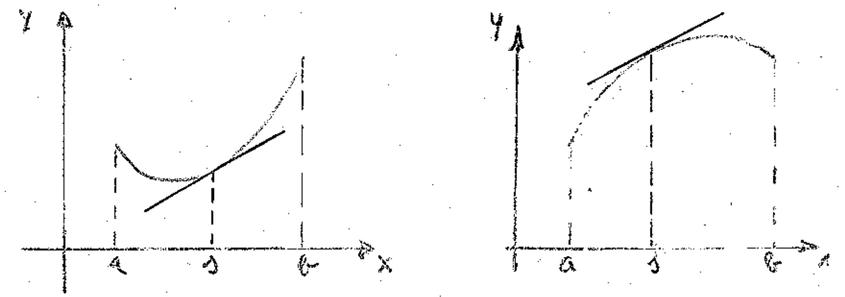
■ Studio della convessità - concavità ...

Dico che $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ se per tutti gli $s,t \in [a,b]$ il segmento che congiunge $(s,f(s))$ con $(t,f(t))$ sta SOPRA il grafico di f relativo all'intervallo $[s,t]$

(è concava ... se sta SOTTO)

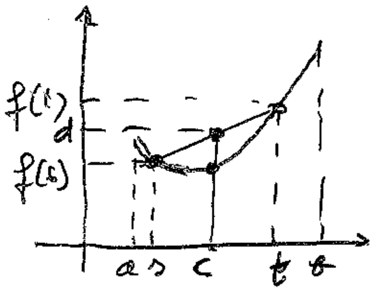


NOTARE: se la funzione è derivabile in $[a,b]$ in ogni punto del grafico, $(s,f(s))$ è definita la TANGENTE. Dove stanno le tangenti nei due casi?



E che cosa fa il coefficiente angolare della tangente al variare di s in (a,b), nei due casi?

Se f è convessa (concava) in (a,b) allora f' cresce (decresce) in (a,b)



$$y = f(s) + \frac{f(t)-f(s)}{t-s}(x-s)$$

$$y(c) = f(s) + \frac{f(t)-f(s)}{t-s}(c-s) = d$$

$$d \geq f(c) \qquad \forall c \in [s,t]$$

utilizzando il teor. della permanenza del segno e questa definizione vedo che:

una funzione $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) se è convessa ha derivata PRIMA crescente.

Questa è una condizione necessaria di convessità.

Cerco condizioni suff. di convessità

> Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabile in (a,b) allora se f' è crescente in (a,b) la funzione f è convessa in (a,b).
>
> Questo enunciato si dimostra con il teor. di Lagrange.

Spiegazione

Enunciate così sono condizioni necessarie di convessità (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti, cioè

se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\iff$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata prima (= derivata seconda: $f''(x)$) in (a,b) allora

f convessa $\iff$ $f''(x) \geq 0$ in (a,b) con $=0$ in punti isolati

f concava $\iff$ $f''(x) \leq 0$ in (a,b)

Esempi

$f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$ è concava in $(0,+\infty)$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$f(x) = x^3$ è ......

Punti di flesso = punti in cui cambia la concavità

vedi pagina successiva con commento al fatto che quelle trovate siano condizioni necessarie e sufficienti; come si debba alterare l'enunciato è indicato dal "≥ 0 con $=0$ solo in punti isolati" scritto sopra.

DERIVATE SUCCESSIVE alla 1ª

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ (a, b event. ∞)

Supponiamo che f sia derivabile in ogni punto di un intervallo $(a_1, b_1) \subseteq (a,b)$
Allora posso definire la FUNZIONE DERIVATA PRIMA

$$f' : (a_1, b_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x_0 \longmapsto f'(x_0) \qquad \forall x_0 \in (a_1, b_1)$$

Possiamo chiederci se f' è derivabile in qualche punto di (a_1, b_1).
Se esiste la derivata PRIMA di f' in x_0 diremo che questa è la DERIVATA SECONDA di f in x_0:

$$(f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \quad \text{(se esiste finito!)}$$
$$\parallel$$
$$f''(x_0).$$

Supponiamo che f' sia derivabile in ogni punto di un intervallo $(a_2, b_2) \subseteq (a_1, b_1)$
Allora posso definire la FUNZIONE DERIVATA SECONDA

$$f'' : (a_2, b_2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x_0 \longmapsto f''(x_0) \qquad \forall x_0 \in (a_2, b_2)$$

ecc. per le altre.

Il teor. di Lagrange e le sue consegu. applicate alla funzione derivata prima ci dicono che

Se $f' : [\bar{a}_1, \bar{b}_1] \subset (a_1, b_1) \longrightarrow \mathbb{R}$
è continua in $[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ ed
è derivabile in $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ allora

se $f'' > 0$ su $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ allora
f' è crescente.

se $f'' < 0$ su $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ allora
f' è decrescente

se $f'' = 0$ su $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ allora
f' è costante.

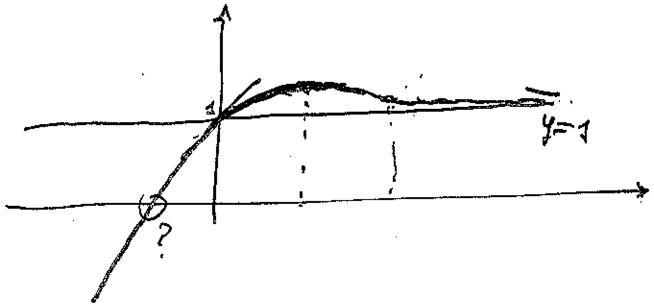
Attenzione: non è vero che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f derivabile in (a,b) e crescente in (a,b) allora $f' > 0$ in (a,b)

Controesempio: $f(x) = x^3$ in $[-1, 1]$
f è crescente in $[-1,1]$.
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $\quad$ la derivata si può annullare quindi una è ≥ 0

Monotonia $\Leftrightarrow$ studio di f'

concavità/convessità $\Leftrightarrow$ studio di f''

$f(x) = 1 + x e^{-x}$



I.D. $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 + 0 = 1^+$

asintoto orizz. per $x \to +\infty$: $y=1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ASINTOTI OBLIQUI: non possono esistere poiché l'ordine di ∞ è superiore a x^1.

$f(0) = 1$

Monotonia:

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x) > 0$

$\Leftrightarrow 1 - x > 0$ poiché $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x < 1$

Quindi la funz. cresce in $(-\infty, 1)$
decresce in $(1, +\infty)$
ha MAX relativo e assoluto in $x = 1$

$f(1) = 1 + \frac{1}{e}$

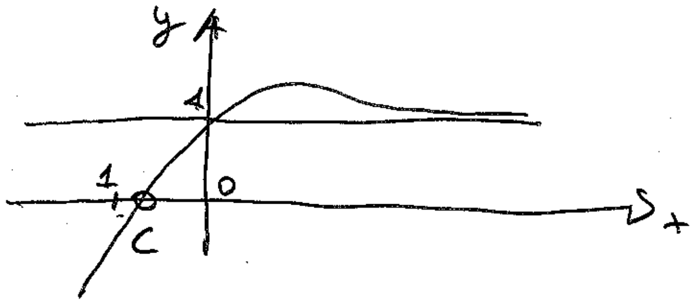
tangente in $(0,1)$ $\quad y - 1 = f'(0)(x - 0)$
cioè $y = 1 + x$

Concavità: $f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) =$
$= -e^{-x}(2-x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

f è concava in $(-\infty, 2)$, convessa in $(2, +\infty)$ e ha un flesso in $x = 2$; $f(2) = 1 + 2e^{-2}$

$\boxed{f(x) = 1 - |x| e^{-x}}$

$f(x) = 1 + x e^{-x}$



Come localizzo lo zero c ?

$c < 0$ $\quad$ poiché in $(-\infty, 0)$ è crescente e $f(0) = 1 > 0$ mentre il $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Cerco un valore $x < 0$ tale che $f(x) < 0$ in modo da applicare il metodo di bisezione.

$f(-1) = 1 - e < 0$

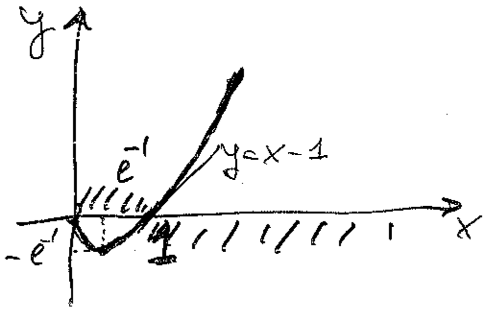
$-1 < c < 0$ $\quad$ ... bisezione ecc...

$f(x) = \cancel{x} \ln x$

I.D. $(0,+\infty)$.

$f(x) > 0$ per $x \in (1,+\infty)$
< 0 per $x \in (0,1)$

$f(1)=0$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
senza asintoti perché l'ordine di ∞ è superiore a x^1.

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^-$

$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0 \iff$
$\iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$

$f'(x) < 0 \iff x \in (0, e^{-1})$

f decresce in $(0, e^{-1})$
cresce in $(e^{-1}, +\infty)$

ha un minimo relativo e assoluto in $x = e^{-1}$ $f(e^{-1}) = -e^{-1}$

$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$

$f'(1) = \ln 1 + 1 = 1$ $\Rightarrow$ tang in $(1,0)$ ha eq. $y = x-1$

---

concavità? $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ in $(0,+\infty)$

Sempre CONVESSA

$f(x) = x^x = e^{x\ln x}$

$\lim_{x\to0^+} x^x = e^0 = 1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f cresce in $(1,+\infty)$
decresce in $(0,1)$ | in 1 min. rel. e assoluto
valore: $(e^{-e^{-1}})$

Studiare per domani

- $\ln(x^2+x) - x$ o $\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) - x$
- $\frac{3x+5}{x^2-1}$
- $\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$
- $x\sqrt{x^2-1}$
- $4x - (x+1)\left(\ln(x+1)\right)^2$