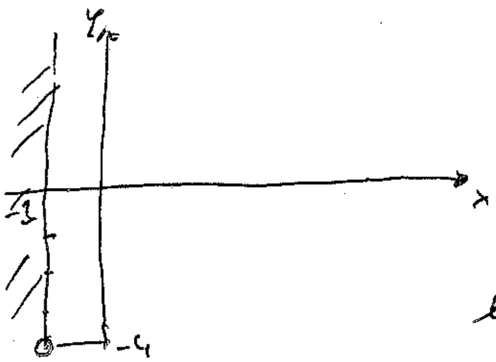
$$f(x) = 4x - (x+1)\left(\ln(x+1)\right)^2 \quad (*)$$

I.D. $x+1>0$ (def. di ln) : $(-1,+\infty)$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 4x - x(\ln x)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(4-(\ln x)^2\right) = -\infty$$

la $f(x)$ va a $+\infty$ "come" $-x(\ln x)^2$ $\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-1^+} 4x - (x+1)\left(\ln(x+1)\right)^2 = -4+[0\cdot\infty]$$

$$= \lim_{x\to-1^+} 4x - \lim_{x\to-1^+}(x+1)\left(\ln(x+1)\right)^2 = \boxed{\text{sostituisco } x+1=t}$$

$$= -4 - \lim_{t\to0^+} t(\ln t)^2 = \boxed{t=\frac{1}{s}} =$$

$$= -4 - \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}(-\ln s)^2 =$$

$$= -4 - \lim_{s\to+\infty} \frac{(\ln s)^2}{s} = -4+0 = -4$$

Monotonia?

(*) $f(0)=0$: Ci sono altri zeri? Certamente sì visti i limiti negativi e il fatto che $f'(0)\neq 0$

$$f'(x) = 4 - \left[1\cdot\left(\ln(x+1)\right)^2 + (x+1)\cdot 2\ln(x+1)\left(\ln(x+1)\right)'\right] =$$

$$= 4 - \left(\left(\ln(x+1)\right)^2 + 2\,\cancel{(x+1)}\ln(x+1)\cdot\frac{1}{\cancel{x+1}}\right) =$$

$$= -\left(\ln(x+1)\right)^2 - 2\ln(x+1) + 4 > 0$$

Sostituire $t = \ln(x+1)$

$$-t^2 - 2t + 4 > 0 \iff$$

$$t^2 + 2t - 4 < 0 \iff$$

$$-1-\sqrt5 < t < -1+\sqrt5$$

$$-1-\sqrt5 < \ln(x+1) < -1+\sqrt5$$

$$e^{-1-\sqrt5} < x+1 < e^{-1+\sqrt5}$$

$$-1+e^{-1-\sqrt5} < x < -1+e^{-1+\sqrt5}$$

La funzione cresce se $x\in\left(-1+e^{-1-\sqrt5}, -1+e^{-1+\sqrt5}\right)$

decresce in $\left(-1,-1+e^{-1-\sqrt5}\right)$ e in $\left(-1+e^{-1+\sqrt5}, +\infty\right)$

e quindi in $x=-1+e^{-1-\sqrt5}$ ha un minimo relativo e in $x=-1+e^{-1+\sqrt5}$ ha un max rel.

$$f\left(-1+e^{-1\pm\sqrt5}\right) = -4+4e^{-1\pm\sqrt5} - e^{-1\pm\sqrt5}\left(\ln\left(e^{-1\pm\sqrt5}\right)\right)^2 =$$

$= -4 + 4e^{-1\pm\sqrt{5}} - e^{-1\pm\sqrt{5}}(-1\pm\sqrt{5})^2 =$

$= -4 + 4e^{-1\pm\sqrt{5}} - e^{-1\pm\sqrt{5}}(6\mp 2\sqrt{5}) =$

$= -4 + (-2\pm 2\sqrt{5})\,e^{-1\pm\sqrt{5}} =$

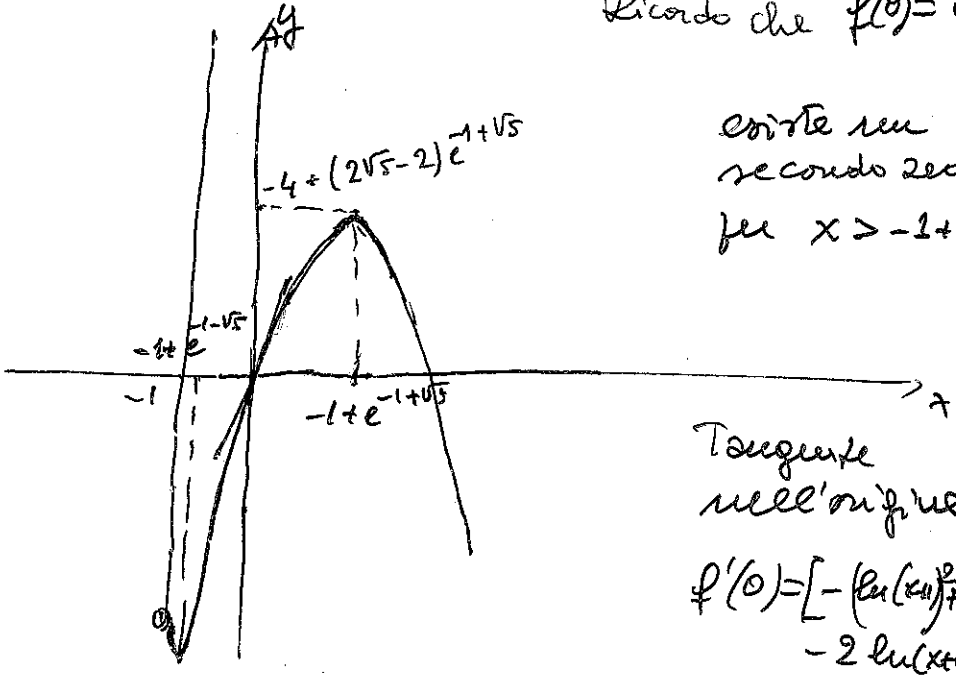
$2\sqrt{5} \sim 4.5$ (pocomeno)

$\sqrt{5} \sim 2.2$

$\sim$ $+: \ -4 + 2.5\,e^{1.2} \sim 3.584$

$-: \ -4 - (2+2\sqrt{5})\,e^{-1-\sqrt{5}} < 0$

Ricordo che $f(0)=0$;



esiste un secondo zero per $x > -1+e^{-1+\sqrt{5}}$

Tangente nell'origine

$f'(0) = \left[-(\ln(x+1))^2 - 2\ln(x+1) + 4\right]_{x=0} = 4$

$y = 4x$

$f''(x) = -2\ln(x+1)\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = -2\,\frac{\ln(x+1)+1}{x+1} > 0 \iff$

$\ln(x+1) < -1 \iff x < -1+e^{-1}$: in $(-1, -1+e^{-1})$ CONVESSA.

TEOR. di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

- Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni definite e derivabili in (a,b)
- •• Sia $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ e $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$
- ••• Se il $\lim_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x)$
- •••• ed esiste $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (finito o no)

ALLORA ESISTE $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è L.

Nell'enunciato si può sostituire ogni $\lim_{x\to a+}$ con $\lim_{x\to b-}$

e quindi se f, g sono def. e derivabili in $(a,c)\cup(c,b)$, $g(x)$ e $g'(x)$ sono $\neq 0$ nei 2 intervalli e $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$ dal fatto che esiste $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ deduco che $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

<u>Ancora</u>: l'ipotesi (•••) può essere sostituita da $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$ ($o -\infty$) e $\lim_{x\to a+} g(x) = +\infty$ ($o -\infty$). Inoltre può essere $a = -\infty$ o $b = +\infty$.

Confronto di infiniti usando il teor. di de l'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \qquad \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}}$$ se $\alpha > 1$ è ancora un $\frac{\infty}{\infty}$. Ma se

$n \leq \alpha < n+1$

derivate n-esime

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{\beta^n e^{\beta x}}$$

(n+1)-esima

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)x^{\alpha-n-1} \to 0}{\beta^{n+1} e^{\beta x} \to +\infty} = 0$$

(*) $(e^{\beta x})'$

$$x \xrightarrow{\beta(\,)} \beta x \xrightarrow{e^{(\,)}} e^{\beta x}$$

$$\beta \cdot e^{\beta x}$$

Adesso:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2.5}}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2.5\, x^{1.5}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2.5 \cdot 1.5\, x^{0.5}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2.5 \cdot 1.5 \cdot 0.5\, x^{-0.5} \to 0}{e^x \to +\infty} = 0$$

$2 \leq 2.5 < \underline{3}$ derivata (n+1)-esima fa passare da $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a $\frac{0}{\infty}$ . . .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \alpha > 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x}}{x^2} \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{-x} = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-x}{x^2-x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{-x^{3/2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{-\frac{3}{2} x^{1/2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{-\frac{3}{4} x^{-1/2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{4}{3} e^x\cdot x^{1/2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin x}{\cos x - x} = -2$$ perché

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}\left(1+\boxed{\frac{\sin x}{2x}}\right)}{-\cancel{x}\left(1-\boxed{\frac{\cos x}{x}}\right)} = -2$$

invece con De l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\cos x}{-\sin x+1}$$ → manca il limite ?

manca il lim

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin(x-1)}{(\ln x)^2} = \boxed{x-1=t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-t\,\sin t}{\ln(t+1)\cdot\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{-t}{t} = -1$$

Applicando de l'Hospital invece:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1\cdot\sin(x-1)+(1-x)\cos(x-1)}{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\cos(x-1)-\cos(x-1)-(1-x)\sin(x-1)}{2\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\cdot\frac{-1}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2\cos(x-1)-0}{\frac{2}{x^2}(1+\ln x)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left[(\arctan x)+\frac{\pi}{2}\right] = [\infty\cdot 0] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan x+\pi/2}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{1+x^2} =$$

$$= -1$$

• Teorema sulla derivata della funz. inversa.

• Siamo sicuri che $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è invertibile se se la funz. è monotona nell'interv. (a,b)

Se f è derivabile in (a,b) questo è certamente vero se f' ha segno costante in (a,b).

Vediamo un esercizio in merito

Si mostri che $f(x)=e^{2x}+2x^3$ è invertibile in $\mathbb{R}$ e detta $g(y)$ la sua inversa si calcoli il valore della sua derivata prima in $y=1$ (senza determinare $g(y)$)

$f(x)=e^{2x}+2x^3$ ha derivata $f'(x)=2e^{2x}+6x^2$

Questa funzione f' è >0 $\forall x\in\mathbb{R}$ (perché lo è e^{2x} e $6x^2\geq 0$) ; quindi

$f(x)$ è crescente $\Rightarrow$ $f(x)$ è invertibile.

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))} \qquad (g=f^{-1})$$

$g(1)=?$ per quale x risulta $f(x)=1$

Di certo esiste 1 solo x che risolve quest'equazione poiché f è invertibile

Riusciamo a trovare almeno un x soluzione di $e^{2x}+2x^3=1$?

Sì $x=0$ (ed è il solo per quanto appena detto)

Quindi $g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2\cdot e^0+6\cdot 0}=\dfrac{1}{2}$

Tangenti nell'origine $x=0$ ($y=f(0)$) ad alcune funz. elementari:

$f(x)=e^x$ $\quad f(0)=1$, $f'(0)=e^0=1$ $\quad\Rightarrow y-1=x$

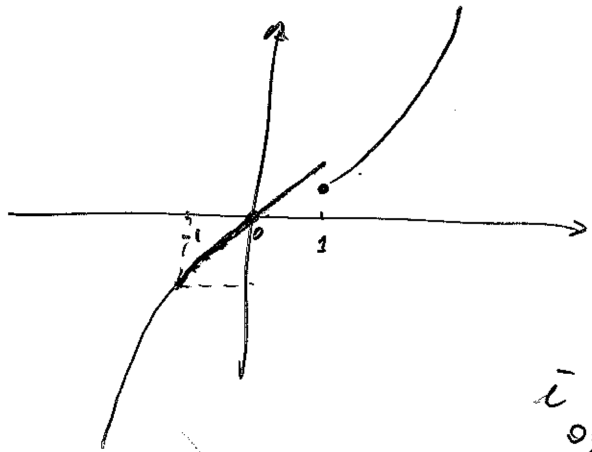
$f(x)=\ln(1+x)$ $\quad f(0)=0$, $f'(0)=1$ $\quad\Rightarrow y=x$

$f(x)=\operatorname{sen}x$ $\quad f(0)=0$, $f'(0)=\cos 0=1$ $\quad\Rightarrow y=x$

$f(x)=\operatorname{tg}x$ $\quad f(0)=0$, $f'(0)=1+\operatorname{tg}^2(0)=1$ $\quad\Rightarrow y=x$

$f(x)=\operatorname{arctg}x$ $\quad f(0)=0$, $f'(0)=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)_{x=0}=1$ $\quad\Rightarrow y=x$

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x\le -1\\ x^3+x^2+x & \text{se } -1<x<0 \\ x & \text{se } 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} x^2 & \text{se } x\ge 1\end{cases}$$



$\lim_{x\to -1^+} x^3+x^2+x=-1$

è derivabile in ogni punto dell'ID?

Prima di tutto: è continua in ogni punto dell'ID.?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}$$

discont. a salto

Non in $x=1$

$\Rightarrow$ f sicuramente non è derivabile in $x=1$

Che cosa succede in $x=-1$ e in $x=0$? la funzione è continua in questi 2 punti. Per stabilire se f è ivi derivabile calcolo il limite della derivata destra e sinistra:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{se } x<-1\\ 3x^2+2x+1 & \text{se } -1<x<0 \\ 1 & \text{se } 0<x<1 \\ x & \text{se } x>1\end{cases}$$

$\boxed{\text{Derivabilità in } x=-1}$

$$\lim_{x\to -1^-} 3x^2=3$$

diversi

$$\lim_{x\to -1^+} 3x^2+2x+1=3-2+1=2$$

quindi f non è deriv. in $x=-1$

$\boxed{\text{Deriv. in } x=0}$

$$\lim_{x\to 0^-} 3x^2+2x+1=1$$

$=$

$$\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

la funzione è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=1$

ATTENZIONE!

Non basta che $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ perché la funzione sia derivabile in x_0 (vedi esempio in $x_0=1$). La funzione f deve almeno essere continua in x_0 (oltre alle condizioni sui due limiti)