Primitive

Abbiamo visto che data una funzione $\overset{\text{continua}}{\vee}$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ le sue primitive su $[a,b]$ si possono ottenere tutte da una nota pur di aggiungere una costante (e quindi sono tante quanti i numeri reali) CONSEGUENZE TEOR. LAGRANGE!
Come calcolare le primitive?

a) PRIMITIVE ELEMENTARI

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^β (se $\beta\neq-1$) è $\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$
- $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^{-1} è $\ln|x|$
- $D(e^x) = e^x$ $\Rightarrow$ " " " e^x è e^x
- $D(a^x) = \ln a \cdot a^x$ $\Rightarrow$ " " " a^x è $\frac{a^x}{\ln a}$
- $D(\operatorname{sen}x) = \cos x$ $\Rightarrow$ " " " $\cos x$ è $\operatorname{sen}x$
- $D(\cos x) = -\operatorname{sen}x$ $\Rightarrow$ " " " $\operatorname{sen}x$ è $-\cos x$
- $D(\operatorname{tg}x) = 1+\operatorname{tg}^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\Rightarrow$ " " " $1+\operatorname{tg}^2x$ è $\operatorname{tg}x$
  " " " $\frac{1}{\cos^2 x}$ "
- $D(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow$ una " " $\frac{1}{1+x^2}$ è $\operatorname{arctg}x$

b) <u>Metodi di integrazione</u>: sono riletture delle principali regole di derivazione:
- derivazione della somma
- derivazione del prodotto per un numero
- derivazione del prodotto di funzioni
- derivazione di funzione composta.

$\boxed{x^\beta}$ qual è una sua primitiva?

$$(k x^\alpha)' = x^\beta$$

$$k\alpha x^{\alpha-1} = x^\beta \Rightarrow k\alpha = 1 \Rightarrow k=\frac{1}{\alpha}$$
$$\alpha-1=\beta \Rightarrow \alpha=\beta+1$$

allora una primitiva di x^β è

$$\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}$$

Siete convinti?

Questo ragionamento vale solo se

$$\beta\neq-1$$

Se $\beta=-1$: $\frac{1}{x}$ e quindi una sua primitiva è

$$\ln|x|$$

Per la giustificazione delle altre primitive elementari e una nota sul termine INTEGRAZIONE vedi pag. successiva

$(e^x)' = e^x \quad \Rightarrow$

una primitiva di e^x è e^x.

una primitiva di 2^x chi è?

a^x ?

RICHIESTA

$D(ka^x) = k \ln a \cdot a^x = a^x$

$\Rightarrow k = \frac{1}{\ln a}$

una prim. di a^x è $\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$

$D(\operatorname{sen} x) = \cos x \quad \Rightarrow$ una primitiva del $\cos x$ (su $\mathbb{R}$) è $\operatorname{sen} x$.

$D(\cos x) = -\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow$ una prim. di $\operatorname{sen} x$ (su $\mathbb{R}$) è $-\cos x$

$D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \Rightarrow$ una prim. di $\left.\begin{array}{c} 1+\operatorname{tg}^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{array}\right\}$ è $\operatorname{tg} x$ sull'interv. $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$

$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow$ una prim. di $\frac{1}{1+x^2}$ su $\mathbb{R}$ è $\operatorname{arctg} x$.

Tutte le primitive di una funzione

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua

si possono trovare sommando ad una primitiva fissata tutti i possibili numeri reali.

Come chiamiamo l'insieme delle primitive di f in (a,b)?

lo chiamiamo

INTEGRALE INDEFINITO

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) \in \text{funzioni } F:(a,b)\to\mathbb{R} \mid F'(x) = f(x) \ \forall x \in (a,b) \}$$

$$= \{ F(x) + c \ , \ c \in \mathbb{R} \text{ ove } F(x) \text{ è una prim. di } f(x) \text{ in } (a,b) \}$$

$$= \{ F(x) + c \}$$

$$= F(x) + c \, .$$

Metodi di integrazione significa metodi per calcolare l'integr. indefinito di una funz. su un intervallo (a,b).

Derivazione della somma
del prodotto di una funz. per una costante } Metodo per SCOMPOSIZIONE

derivazione del prodotto $\Rightarrow$ metodo di int. per PARTI

derivazione di funz. composte $\Rightarrow$ metodo di int. per SOSTITUZIONE

Integrazione per SCOMPOSIZIONE

$f(x)$ e $g(x)$ siano due funz. definite e continue in $[a,b]$ e siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive di $f(x)$ e $g(x)$ (rispettivam.) in $[a,b]$.

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, una primitiva su $[a,b]$ di

$$\alpha f(x) + \beta g(x)$$

è la funzione

$$\alpha F(x) + \beta G(x)$$

ESEMPI

Primitiva di un polinomio:

$$P(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 1$$

$$\int P(x)\,dx = 5\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

e più in generale

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\,dx =$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c$$

$$\int tg^2 x\,dx = \int \left[(1+tg^2 x) - 1\right] dx =$$

$$= \int (1+tg^2 x)\,dx - \int dx = tg\,x - x + c.$$

$$\int \frac{1}{(sen^2 x)(cos^2 x)}\,dx = \int \frac{sen^2 x + cos^2 x}{(sen^2 x)(cos^2 x)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{sen^2 x}\,dx = tg\,x - \frac{1}{tg\,x} + c$$

?

$$\boxed{\left(\frac{1}{tg\,x}\right)' = \left(\frac{cos\,x}{sen\,x}\right)' = \frac{-sen^2 x - cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x}}$$

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x} + \ln|x| + c.$$

è l'integrale su $(0,+\infty)$ di $\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

$$\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx = ?$$

i.D. della funzione INTEGRANDA ?

$(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

Dovrò scegliere in base al problema quale dei 3 intervalli di definizione e continuità mi interessa e quindi dove considero la primitiva

$$\frac{3x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} \overset{?}{=} \frac{3x^2+3x}{x^2-1}$$

devo chiedere $x \neq -1$

Calcolo $\int \frac{3x}{x-1}\,dx = 3\int \frac{x}{x-1}\,dx =$

$$= 3\int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = 3\int \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= 3\left(x + \ln|x-1|\right) + c.$$

Questa sarà una primitiva di $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}$ relativamente ad uno degli intervalli $(-\infty,-1)$ oppure $(-1,1)$ oppure $(1,+\infty)$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = ?$$

La funz. integranda è def. e continua in $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \qquad \Delta \text{Den} > 0$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\iff 1 = (A+B)x + A - B \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ 2A=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} B=-1/2 \\ A=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

La primitiva di $\frac{1}{x^2-1}$ su ciascuno degli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$ sarà

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+c$$

la prim. di $\frac{1}{x^2-1}$ in $(-1,1)$ sarà

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+c.$$

Per esercizio

$$\int\frac{x^2+1}{x-1}\,dx$$

$$\int\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$$

Integrazione per PARTI

Derivata del prodotto: $(fg)'=f'g+fg'$

$$fg'=(fg)'-f'g$$

Che cosa succede se calcolo una primitiva della funzione a destra?

$$\int fg'\,dx=\int(fg)'\,dx-\int f'g\,dx$$

$$=fg-\int f'g\,dx$$

$f(x)$ fattor finito

$g'(x)\,dx$ fattor differenziale

$g'(x)\,dx$ è il differenziale di $g(x)$ $\underset{DF}{:}$ dg

per ricordarlo: $g'(x)=\frac{dg}{dx}$

ESEMPI TIPO.

$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$
$g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=e^x$

$\int xe^x\,dx=$ fattor finito x, fattor differenziale $e^x dx$

$$=xe^x-\int 1\cdot e^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=$$

$$=xe^x-e^x+c=(x-1)e^x+c$$

per esercizio $\int x^2 e^x \, dx$

$$\int x \cos x \, dx =$$ fattor finito x $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$
" diff: $\cos x \, dx$ $g'(x)=\cos x \Rightarrow g(x)=\operatorname{sen} x$

$$= fg - \int f'g \, dx$$

$$= x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c$$

---

per esercizio $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

$$\int x^\alpha \ln x \, dx =$$

in particolare per $\alpha = 0$ si trova $\int \ln x \, dx$.

f.f. $\ln x \Rightarrow f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\boxed{\text{I.D. } (0, +\infty)}$

f.d. $x^\alpha dx \Rightarrow g'(x) = x^\alpha$ $g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\boxed{\text{se } \alpha \neq -1}$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1} \, dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} \cdot x^{\alpha+1} + c$$

purché $\alpha \neq -1$

In part. per $\alpha = 0$ $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$

se $\alpha = -1$ $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$:

f.f. $\ln x$ f.d. $\frac{1}{x} dx$ $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = \ln x$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

$\cdot(+1)$ $\cdot(-1)$

$$Z = (\ln x)^2 - Z \qquad 2Z = (\ln x)^2$$

$$Z = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c.$$

Questa strategia viene usata anche nei prossimi 2 integrali

$$\int \cos^2 x \, dx =$$ $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$g'(x) = \cos x$ $g(x) = \operatorname{sen} x$

$= \operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x)^2 \, dx$ se integro ancora per parti torno indietro:

$$= \cancel{\operatorname{sen} x \cos x} + \operatorname{sen} x (\cancel{-}\cos x) - \int \cos x (-\cos x) \, dx$$

NON VA!

MA $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ e quindi

$$\int \cos^2 x\,dx = \operatorname{sen}x\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \operatorname{sen}x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\,dx = \operatorname{sen}x\cos x + x + c$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{\operatorname{sen}x\cos x + x}{2} + C$$

ove $C = c/2$

$$\int e^x \cos x\,dx =$$

si può scegliere come ff tanto e^x che $\cos x$

$e^x dx$ fatt. diff.

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}x$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen}x\,dx =$$

$e^x dx$ f.d.

$f(x) = \operatorname{sen}x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$= e^x\cos x + \left[e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \cos x\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\cos x + \operatorname{sen}x)}{2} + c.$$

Esercizio sulla derivazione fatto a inizio lezione

$$g(x) = x\sqrt{x^2-1} \qquad \text{I.D. } (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

$$= x\sqrt{h(x)} \qquad \to C$$

$$g'(x) = \sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2-1} - (2x^2-1)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$$

$$= \frac{4x(x^2-1) - (2x^2-1)\cdot x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{x(2x^2-3)}{(x^2-1)^{3/2}} \quad \dots$$

lo studio del segno di g' e di g'' si riconduce allo studio del segno dei numeratori relativamente all'I.D. della derivata in esame

$$(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$
