$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx = ?$$

Esercizio assegnato il 17/11

I.D. $\cos x + \operatorname{sen} x \neq 0 \iff \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} \cos x + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \neq 0$

$\iff \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \iff x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$

$\iff x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

La funzione integranda è continua negli intervalli della forma

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx =$$

$\int (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$

$= \operatorname{sen} x + \cos x + c$

è la primitiva di $\frac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$ su ciascun intervallo della forma

$\left(-\pi/4 + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$.

III. Integrazione per sostituzione

Ricordo: $D(h(g(t))) = h'(g(t)) \cdot g'(t)$

Sia ora $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione continua di cui vogliamo trovare una primitiva H : $H'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

VERSIONE FACILE Se $f(x)$ ha la forma $h'(g(x)) \cdot g'(x)$ si ha

$$\int f(x)\,dx = \int h'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = h(g(x)) + c$$

e quindi $H(x) = h(g(x))$.

Esempi	Casi particolari:
1) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$	ⓐ $\int \operatorname{tg} x\,dx =$ ⓑ $\int \frac{x\,dx}{x^2+b^2} =$ vedi pagine successive
2) $\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}(g(x)) + c$	$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$

In generale cerco di riprodurre questa situazione con una SOSTITUZIONE $x = g(t)$

VERSIONE GENERALE. Sia $g : [c,d] \to [a,b]$ una funz. derivabile con derivata 1ª continua e $\neq 0$ su $[c,d]$.

(ciò garantisce che esiste $g^{-1} : [a,b] \to [c,d]$: PERCHÉ?)

Allora

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\right]_{t = g^{-1}(x)}$$

Infatti, se $H'(x) = f(x)$ $\quad \int H'(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = H(g(t)) + c$

e la sostituzione $t = g^{-1}(x)$ riporta proprio a $H(x) + c$.

Esempi

1) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ Vedi pagine successive   2) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

Esempi di SOSTITUZIONE FACILE

① $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c.$ $\quad (g(x)\neq 0)$

(1a) ad esempio $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx =$

$= -\ln|\cos x| + c$

su $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $\quad \forall k\in\mathbb{Z}$

(1b) ancora $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+b^2}\,dx$ $\quad$ con $b\neq 0$, $x^2+b^2>0$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+b^2| + c =$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+b^2) + c$

su tutto $\mathbb{R}$

---

② $\int \frac{g'(x)}{g^\alpha(x)}\,dx$ $\quad$ ove $\alpha\neq 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\qquad g(x)>0$

$= \int g^{-\alpha} g'\,dx = \frac{g^{1-\alpha}(x)}{1-\alpha} + c = \frac{1}{(1-\alpha)\,g^{\alpha-1}(x)} + c$

esempio: $\int \frac{2x}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{1}{-(x^2+b^2)} + c$

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \ldots$

③ $\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx$ $\qquad$ definita dove è definita $g(x)$

$= \arctan g(x) + c.$

esempio $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{dx}{1+(x+1)^2} =$

$= \arctan(x+1) + c.$

Meno semplice

① $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}\,dx =$ $\quad \begin{cases} x = g(t) = at \\ t = \frac{x}{a} \\ dx = a\,dt \end{cases}$

$= \int \frac{a\,dt}{a^2(t^2+1)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} =$

$= \frac{1}{a}\arctan t + c =$

$= \boxed{\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c}$ def su $\mathbb{R}$.

② $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

vedo x^2+x+1 come somma di 2 quadrati

$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

e quindi:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left(\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{3/4}+1\right)} \Rightarrow$$

Voglio

$$\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}} = t^2 \overset{\text{e quindi}}{\Rightarrow} x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt}{\frac{3}{4}(t^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + c.$$ ∎

Ora sappiamo calcolare la primitiva di ogni funzione razionale fratta(*) con denominatore di grado ≤ 2

* Rapporto di 2 polinomi.

Facciamo un po' di esempi

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x+6}\,dx$$

gr Num > gr. denom

Faccio la divisione del Num. per il den.

$$N = D\cdot Q + R$$

$$\frac{N}{D} = \frac{D\cdot Q}{D} + \frac{R}{D} =$$

$$= Q + \frac{R}{D}$$

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & -3 & 2 \\ -6 & & -6 & 54 \\ \hline & 1 & -9 & 56 \end{array}$$

$Q = x-9$

$R = 56$

$$\int\left((x-9)+\frac{56}{x+6}\right)dx = \text{scompongo}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 9x + 56\ln|x+6| + c.$$ ∎

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-3x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$\int\left(1 - \frac{3x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + c$$ ∎

ESERCIZIO 3

$$\int x \cos 2x \, dx = $$ per parti ff x

primitiva di $\cos 2x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

derivata di x : 1

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x - \int 1 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \, dx =$$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} \int (-\operatorname{sen} 2x) \, dx =$$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c.$$ su $\mathbb{R}$. ■

FARE LA VERIFICA

ESERCIZIO 4

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$

$$\int x (\cos x)^2 \, dx =$$

$$\int x \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) + \frac{x^2}{4} + c$$ ■

ESERCIZIO 8

$$\int \frac{x-4}{2x^2 - 4x + 5} \, dx$$

$\frac{\Delta}{4}$ den $= 4 - 10 < 0$

den. è sempre > 0 e quindi l'integranda è definita e continua in $\mathbb{R}$

$(2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4 = 4(x-1)$

$x - 4 = x - 1 - 3 = \frac{1}{4}(4x - 4) - 3$. Dunque:

$$\int \frac{x-4}{2x^2 - 4x + 5} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x - 4}{2x^2 - 4x + 5} \, dx - 3 \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln (2x^2 - 4x + 5) - 3 \int \frac{dx}{2(x^2 - 2x + 1) + 3} =$$

$$3\left[\frac{2}{3}(x-1)^2 + 1\right]$$

$$= \frac{1}{4} \ln (2x^2 - 4x + 5) - \frac{3}{3} \int \frac{dx}{\left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right]^2 + 1} =$$

$\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1) = t$

$x - 1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$

$x(t) = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$

$dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\, dt$

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right)^2 + 1} = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\, dt}{t^2 + 1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \arctan t + c$$

$$\to = \frac{1}{4} \ln (2x^2 - 4x + 5) - \sqrt{\frac{3}{2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right) + c$$

■

ESERCIZIO 10

$$\int \frac{dx}{x^2-4x-5} =$$

Dom. $(x-5)(x+1)$
la funz. integranda è def e continua in
$(-\infty,-1)\cup(-1,5)\cup(5,+\infty)$

$$\frac{1}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-5)}{(x-5)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-5B}{(x-5)(x+1)}$$

$\Longleftrightarrow \quad (A+B)x + A-5B \equiv 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ A-5B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 6A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1/6 \\ A=1/6 \end{cases}$

$$\int \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x-5| - \ln|x+1|\right)+c$$

$$= \ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|^{1/6} + c \quad ■$$

ESERCIZIO 11

$$\int \arctan x \, dx = \boxed{\begin{array}{l} \text{f.d. } 1\,dx \\ \text{ff } \arctan x \end{array}}$$

$$= x\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \quad ■$$

$$\int 3x^2 \arctan x\,dx = x^3 \arctan x - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -x^3-x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$= x^3\arctan x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \quad ■$$

$$\int 2x \arctan x\,dx = \ldots\ldots$$

ESERCIZIO 15

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}x\cos x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\,dx =$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen}x| + c = \ln|\operatorname{tg}x| + c$$

ESERCIZIO 16

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x} = \boxed{\begin{array}{l} x = 2t \\ dx = 2dt \end{array}} \int \frac{2dt}{\operatorname{sen}2t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\operatorname{sen}t\cos t} = \ln|\operatorname{tg}t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

ESERCIZIO 17

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \quad \boxed{\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x+\pi/2)} = \boxed{\begin{array}{l} x + \pi/2 = t \\ dx = dt \end{array}} = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}t} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

ESERCIZIO 21

$$\int \frac{\boxed{e^x}\ln(2+e^x)}{(e^x+1)^2}\boxed{dx} =$$

$$(e^x+1)' = e^x$$
$$e^x + 1 = t$$
$$(e^x+1)' = e^x$$
$$e^x dx = dt$$

$$= \int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$$

per parti fatt. diff.

$$\frac{1}{t^2}dt = t^{-2}dt$$

primitiva $-t^{-1}$

$$= -\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t) - \int -\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}\,dt.$$

$$= -\frac{1}{t}\ln(1+t) + \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt$$

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

$$= -\frac{1}{t}\ln(1+t) + \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c$$

$$= -\frac{1}{e^x+1}\ln(2+e^x) + \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + c$$

ESERCIZI DA SVOLGERE!

1) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

1bis) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$

2) $\int x^n \cos x \, dx$

3) $\int x \cos 2x \, dx$ svolto in classe

4) $\int x (\cos x)^2 dx$ svolto in classe

5) $\int e^x (\operatorname{sen} x)^2 dx$

6) $\int x e^{2x} dx$

7) $\int e^{-3x} \operatorname{sen} x \, dx$

8) $\int \frac{x-4}{2x^2-4x+5} dx$ svolto in classe

9) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$

10) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$ Svolto in classe

11) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ svolto in classe

12) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

13) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$ Svolto in classe

16) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ (SOST.) "

17) $\int \frac{dx}{\cos x}$ (SOST.) "

18) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$ (

19) $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} \, dx$

20) $\int \left(\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \right) dx$

21) $\int \frac{e^x \ln(2+e^x)}{(e^x+1)^2} dx$ svolto in classe

22) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

23) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}} dx$ (con dominio)

24) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ (" ")

25) $\int \frac{3(3\ln x - 1)^4}{2x} dx$ (" ")

26) $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ (con dominio)

28) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} dx$ (con dominio)

29) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ (con dominio)

30) $\int \left(\sqrt{4x-1} + \frac{1}{\sqrt{3-2x}} \right) dx$ (con dominio)

31) $\int \frac{3x}{(3x^2-2)^2+1} dx$

32) $\int x (x^2 + e^{x^2} + e^x) dx$

33) $\int \frac{dx}{x(3\ln x + 1)}$ (con dominio)

34) $\int \frac{\cos(3x)}{(\operatorname{sen}(3x))^2} dx$ (con dominio)

35) $\int 2 e^{-2\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x \, dx$