VETTORI

grandezze individuate da : MODULO (o norma) : reale ≥ 0
DIREZIONE
VERSO.

Rappresentazione: FRECCE USCENTE DA UN PUNTO FISSATO DELLO SPAZIO : O

···· Traslazione $\underline{v}$ da O ad A
o equivalentemente da P a Q $\vec{OA}=\vec{PQ}$
o ······

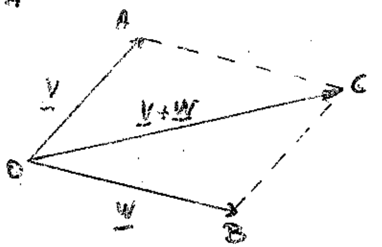
identificazione di vettori EQUIPOLLENTI

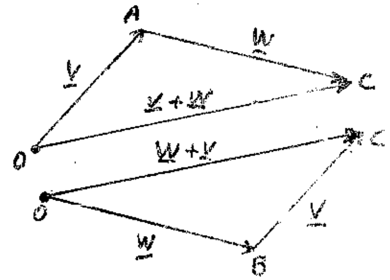
$|\underline{v}|$ Modulo di $\underline{v}$

se $|\underline{v}| = 0$ dico che $\underline{v}$ è il vettore nullo $\underline{0}$

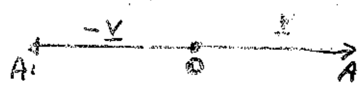
OPERAZIONI

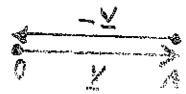
SOMMA
$\underline{v}+\underline{w}$





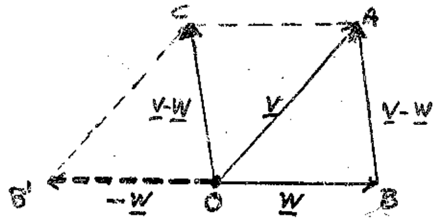
- commutativa
- associativa
- neutro : vettore nullo : $\underline{0}$
- opposto



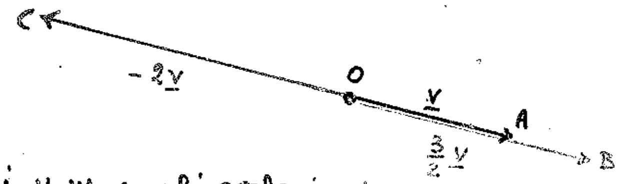


DIFFERENZA : $\underline{v} - \underline{w}$

$\vec{OC} = \vec{AB}$ NO $\vec{BA}$



PRODOTTO PER SCALARE $t \in \mathbb{R}$



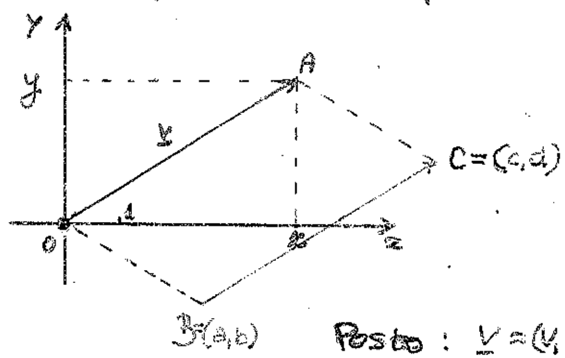
Per tutti i $\underline{v}, \underline{w}$ e gli scalari s,t:

- $(s+t)\underline{v} = s\underline{v} + t\underline{v}$
- $s(\underline{v}+\underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$
- $s(t\underline{v}) = (st)\underline{v}$
- $1(\underline{v}) = \underline{v}$

Dirò che i vettori con "SOMMA" e "PRODOTTO PER SCALARE" formano spazio vettoriale.

VETTORI COME "n-uple" ORDINATE

Sist. di riferimento nel piano



$\underline{v} = \vec{OA} = (x,y)$

x, y componenti (scalari) di $\underline{v}$

$\vec{OA} = \vec{BC} = (c-a, d-b)$

equazioni param. della retta

Posto : $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$\Rightarrow \underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2)$

Considero un insieme V e in esso una ~~due~~ operazione di somma e un'operazione "esterna" che lega V con un insieme numerico (che sia un campo: e.g. $\mathbb{R}$)

Dico che $(V, +, \text{pr. per scalare})$ è uno sp. vett. se

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \text{si ha}$$

S0) $\underline{v} + \underline{w} \in V$

S1) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$

S2) $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$

S3) $\exists$ vettore neutro: $\underline{0}$ che è tale che

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \qquad \forall \underline{v} \in V$$

S4) $\forall$ vettore $\underline{v} \in V$ esiste il vettore opposto $(-\underline{v})$ che è tale che

$$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$$

P0) $\alpha \underline{v} \in V$

P1) $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}$

P2) $\alpha(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha \underline{v} + \alpha \underline{w}$

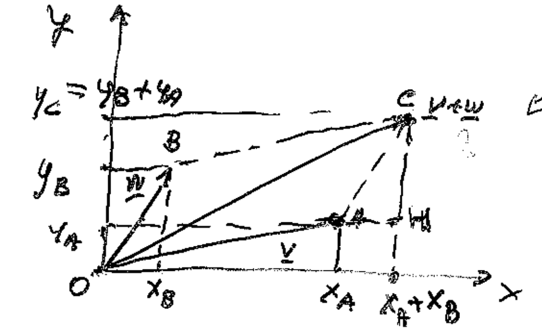
P3) $\alpha(\beta \underline{v}) = \alpha\beta \underline{v}$

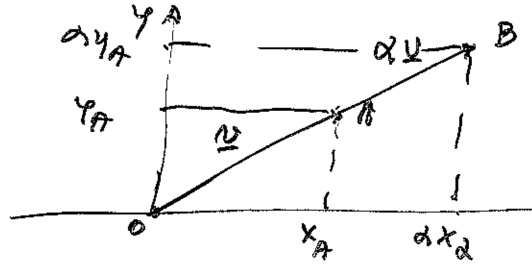
P4) $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

$$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$t\underline{v} = (tv_1, tv_2)$$

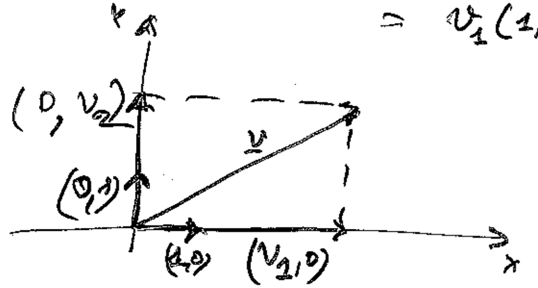
Spiegazione





per similitudini

$$\underline{v} = (v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1)$$



$(1,0)$ e $(0,1)$ sono due vettori orientati rispettivamente come l'asse x e l'asse y e come essi orientati, di modulo uno (VERSORI)

Abbiamo visto che ogni vettore $\underline{v}$ del piano si può scrivere come somma di 2 opportuni prodotti per scalare dei versori fondamentali $(1,0) = \underline{i}$ $(0,1) = \underline{j}$

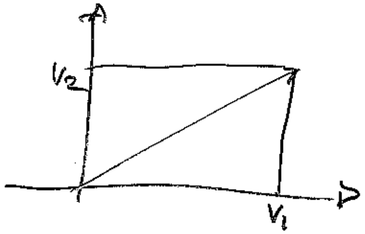
$$\underline{v} = (v_1, v_2) = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j}$$

Per non scrivere la frase lunga ed equivoca scritta sopra introduciamo la nozione di Combinazione lineare di due (o più) vettori mediante 2 (o più) scalari.

dico che $\underline{u}$ è combinazione lineare di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ mediante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se

$$\underline{u} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{w}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



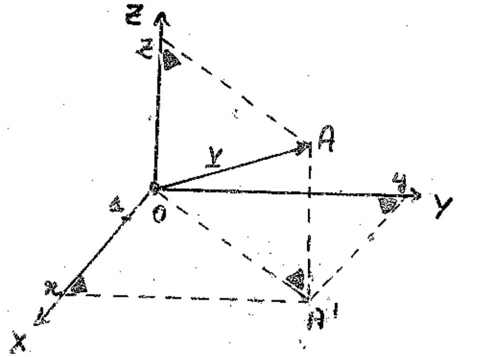
Modulo di $\underline{v} = (x, y)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$

Distanza di B da C : $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

Versori della base canonica, $\underline{i} =$ $\underline{j} =$

VEDI PAGINE PRECEDENTI

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio con orientazione DESTRORSA



GLI ANGOLI IN FIGURA SONO RETTI

$\underline{V} = \overrightarrow{OA} = (x, y, z)$

... componenti di $\underline{v}$

$|\underline{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow$ distanza tra 2 punti $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

$|\overrightarrow{BC}| = |(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)|$
$= \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

Se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{v} + \underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$$

$$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$$

$$\underline{V} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)$$

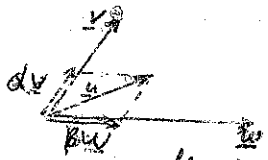
Versori della base canonica $\underline{i} = (1,0,0)$ $\underline{j} = (0,1,0)$ $\underline{k} = (0,0,1)$

$(x, y, z) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ quindi (x,y,z) è comb. lineare di $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ mediante x, y, z

<u>Combinazione lineare</u>. Come sopra!

<u>Indipendenza lineare</u>

v, w dipendenti



$\underline{u} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{w}$

Dire che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono indipendenti significa che nessuno di essi può essere rappresentato come comb. lineare degli altri.

Ad esempio

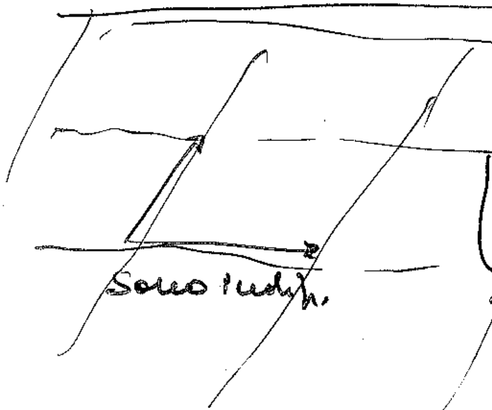
$$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\,\underline{i} + v_2\,\underline{j} + v_3\,\underline{k}$$

$\Rightarrow$ $\underline{v}, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ Non sono indipendenti

Altri esempi:

su una retta 2 vettori non sono mai indipendenti

- 1 solo vettore su una retta è indipendente se è $\neq \underline{0}$



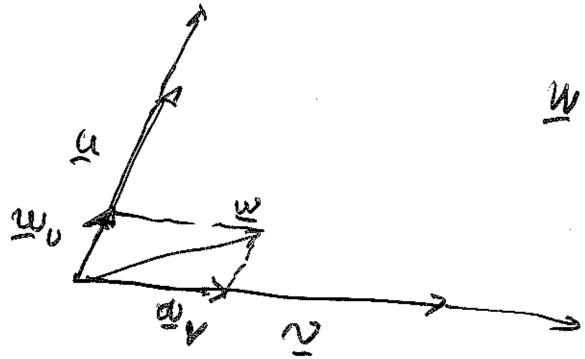
Sono indip.

2 vettori nel piano sono indipendenti?

NON VOGLIO $\underline{v} = \alpha \underline{w}$, $\underline{w} = \beta \underline{v}$

Sì se non sono uno multiplo dell'altro cioè non ~~[illegible]~~ hanno la stessa direzione

3 vettori nel piano sono indip.? NO!



$$\underline{w} = \underline{w}_U + \underline{w}_V$$

$$\underline{w}_U = \alpha\,\underline{u}$$

$$\underline{w}_V = \beta\,\underline{v}$$

$$\underline{w} = \alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{v}$$