Esercizi del 22 e 23 novembre

CALCOLO DI PRIMITIVE

$$\int (\cos x + \cos^3 x + \cos^5 x)\,\operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= -\int f(\cos x)(-\operatorname{sen} x)\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\cos x = t\\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt\end{array}}$$

$$= -\int (t + t^3 + t^5)\,dt$$

$$= -\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6}\right) + c = -\left(\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6}\right) + c$$

$x = g(t)$ $\quad$ g invertibile (g', g' cont. di segno cost.)

$t = g^{-1}(x)$

$\underbrace{\boxed{x = \arccos t}}_{g(t)} \rightarrow$ è invertibile $\Rightarrow g^{-1} = \cos x$

integrazione per sostituzione VERSIONE ~~SEMPLICE~~

19

$$\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x}\,dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \sqrt{\cos x}\,dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x\,(1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\cos x = t\\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt\end{array}}$$

$$= -\int (1 - t^2)\sqrt{t}\,dt = -\int t^{1/2} - t^{5/2}\,dt =$$

$$= -\left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{7}t^{7/2}\right) + c = -\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\cos x)^{7/2} + c$$

$\boxed{x > 4}$ I.D.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x-4} = t\\ x - 4 = t^2\\ dx = 2t\,dt\end{array}} = \int \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(4+t^2)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{4\left(\frac{t^2}{4}+1\right)} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \arctan \frac{t}{2} + c =$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \arctan$$

$$= \arctan \frac{\sqrt{x-4}}{2} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx =$$

I.D. $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x + 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(t^2-1)} = \int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$$

in $(-1, 0)$ la primitiva ha forma $\ln\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}\right)$; in $(0, +\infty)$ ha la forma $\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right)$

(18) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$ I.D. $x \geq 0$

$\boxed{\text{Sost. } \sqrt[4]{x} = t \Rightarrow x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt}$

$$= \int \frac{t^2 - t}{1+t} \cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^5 - t^4}{t+1}\,dt =$$

	1	-1	0	0	0	0
-1		-1	2	-2	2	-2
	1	-2	2	-2	2	-2

quoziente $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2$
resto -2

$$= 4\int \left[(t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 2) - \frac{2}{t+1}\right] dt =$$

$$= 4\left(\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|t+1|\right) + c =$$

$\boxed{t = \sqrt[4]{x}}$

$$= 4\left(x\frac{\sqrt[4]{x}}{5} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} - 2\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right) + c$$

$f(x) = (x-5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ Trovare gli asintoti per $x \to -\infty$ (e per $x \to +\infty$: per compito)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\cdot 1 = -\infty$$

potrebbe esistere un asint. obliquo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{5}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) = 1$$

$m = 1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(x-5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x\right] = (-\infty + \infty) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x - 5\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) - \lim_{x\to-\infty} 5\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} =$$

$$x\,\frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$$

$$= \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) - 5 =$$

$$= \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}}{\frac{1}{x}}\right) - 5 = -4$$

$\boxed{y = x - 4}$

Studiare monotonia di

$$f(x)=\frac{3-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

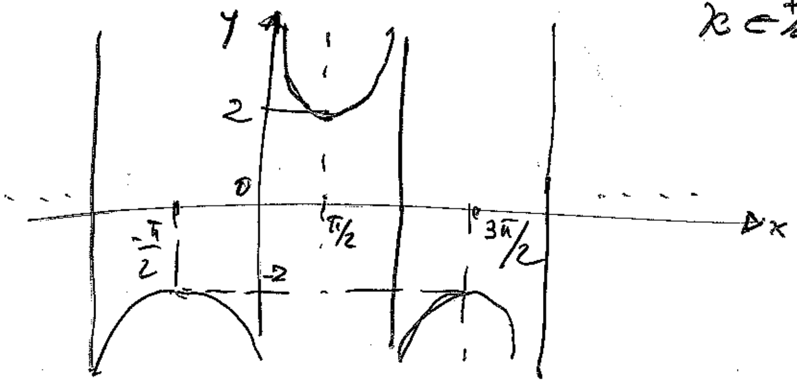
ID. $x \neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$$f' = \frac{(-4\cdot 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x)\operatorname{sen}x-\cos x(3-4\operatorname{sen}^2x)}{\operatorname{sen}^2x} =$$

$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\left(-8\operatorname{sen}^2x-3+4\operatorname{sen}^2x\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}_{>0}\underbrace{\left(-4\operatorname{sen}^2x-3\right)}_{<0} > 0$$

$\iff \cos x<0 \iff \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$



$$\boxed{\frac{3}{\operatorname{sen}x}-4\operatorname{sen}x}$$

Trovare gli zeri di $P(x)$

$$P(x)=-3x^5+x^3+6x^2-5$$

$$P'(x)=-15x^4+3x^2+12x=$$
$$=3x(-5x^3+x+4)$$

$P'(1)=0$

	-5	0	1	4
1		-5	-5	-4
	-5	-5	-4	0

$$P'(x)=-3x(x-1)\underbrace{(+5x^2+5x+4)}_{\Delta<0}\geq 0$$

il trinomio è ≥ 0

$\iff -3x(x-1)\geq 0 \iff 0\leq x\leq 1$

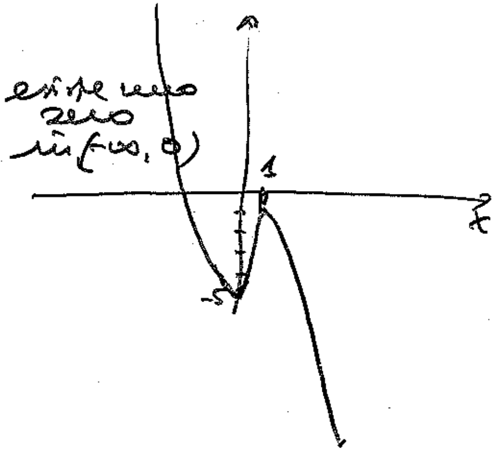
$P(x)$ decresce in $(-\infty,0)$ e in $(1,+\infty)$
cresce in $(0,1)$

minimo relativo in $x=0$
max " in $x=1$

$P(0)=-5$
$P(1)=-3+1+6-5<0$ → esiste uno zero in $(-\infty,0)$

$\lim_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$

(invece $\lim_{x\to+\infty} P(x)=-\infty$)

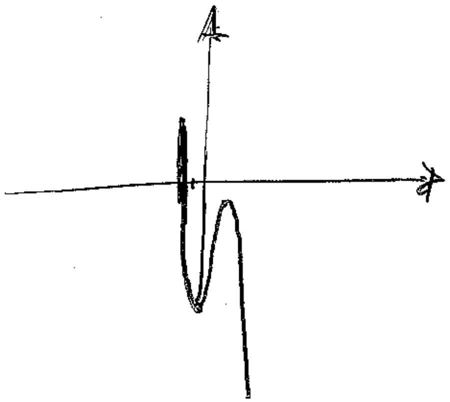


$f(x) = -3x^5 + x^3 + 6x^2 - 5$

$P(0) = -5$

$P(-1) = 3(-1+6-5) = 3$

certamente lo zero è compreso tra -1 e 0



$P'(x) = -15x^4 + 3x^2 + 12x$

$P''(x) = -60x^3 + 6x + 12 > 0$

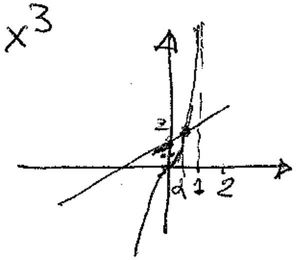
$-10x^3 + x + 2 > 0$ anche questa diseq. va studiata con un metodo grafico. (*)

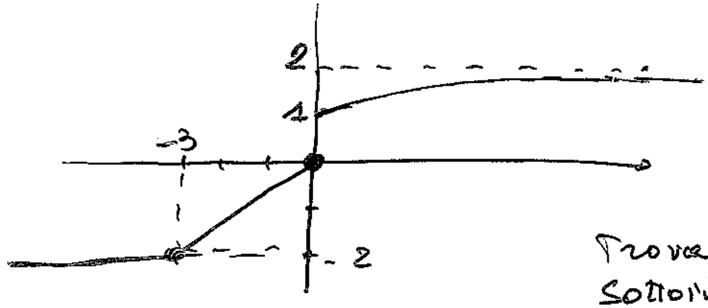
l'eventuale flesso è tra 0 e 1

raffinare con il metodo di bisezione

(*) $x + 2 > 10x^3$

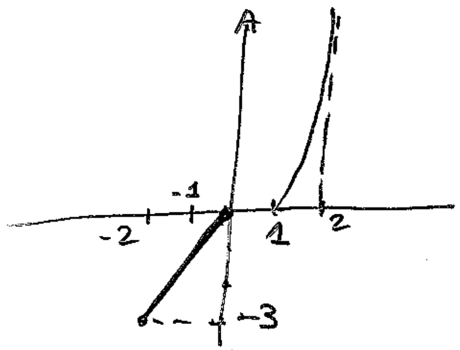
per $x < \alpha$





Trovare il più grande sottointervallo I di $\mathbb{R}$ tale che la restrizione f_I ad esso di $f(x)$ sia invertibile e tracciare grafico di $y = f|_I^{-1}(x)$

$I = [-3, +\infty)$: qui si può invertire



$f|_I : [-2,0] \cup (1,2) \to [-3$

$$h(x) = \begin{cases} a(-x)^b \ln\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right) & \text{se } x<0 \\ \frac{3x}{x^2 - \ln(x^3+2x)} & \text{se } x>0 \\ ? & \text{se } x=0 \end{cases}$$

per quali a, b si può completare la def. in $x=0$ rendendo f continua in $x=$

$$\lim_{x\to 0^-} a(-x)^b \ln\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right) = \left[a(-x)^b \ln 1\right]$$

se $b \geq 0$ il limite è 0 e quindi non vi è la contin.
Consideriamo il caso $b<0$ $\left((-x)^b \to +\infty \ : [\infty \cdot 0]\right)$

(*)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{x^2-\tan(x^3+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

x^3 e x^2 sono trascurabili $= \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{-\tan(2x)} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}$$

(*)

$$\begin{array}{r|l} 1+x^2 & -x+1 \\ x-x^2 & \overline{-x-1} \\ \hline x+1 & \\ -x+1 & \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \frac{1+x^2}{1-x} =$$

$$\frac{1+x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+2x^2}{1-x} = \left(1+x+\frac{2x^2}{1-x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right) \sim x+\frac{2x^2}{1-x} \quad \text{se } x\to 0$$

$$a(-x)^b \ln\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right) = -a(-x)^{b+1}\underbrace{\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}_{\downarrow\, 1}$$

perché $-a(-x)^{b+1}$ tenda a $-\frac{3}{2}$

$\boxed{b+1=0}$ $\left(\Rightarrow (-x)^{b+1}=1\right) \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$

VETTORI

(1) $\underline{u} = (3,2,4) \qquad \underline{w} = (-1,3,1)$

Calcolare $\underline{u} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

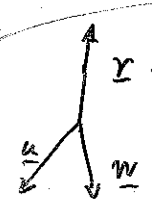
$$= \underline{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(2-12) - \underline{j}(3+4) + \underline{k}(9+2) =$$

$$= -10\,\underline{i} - 7\,\underline{j} + 11\,\underline{k} = (-10,-7,11) = !$$

$\underline{u}\wedge\underline{v}$, $\underline{u}$, $\underline{v}$ sono a due a due ortogonali?

(2) a cosa verificarlo



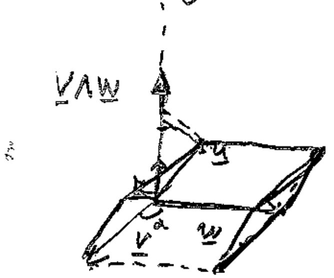
$\underline{v} = \underline{u}\wedge\underline{w} \perp \underline{u}$

$\underline{u}\wedge\underline{v} \perp \underline{u}$

$\perp \underline{v}$

prodotto MISTO Geometricamente

$$|\underline{v}\wedge\underline{w}| = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\sin(\alpha)$$



è l'area del parallelogramma di lati $\underline{v}$, $\underline{w}$

$\underline{v}\wedge\underline{w}$ $\perp$ piano dove è contenuto il parallelogramma

passiamo al versore che si ottiene da esso dividendo per il suo modulo:

$$\underline{r} = \frac{\underline{v}\wedge\underline{w}}{|\underline{v}\wedge\underline{w}|} \qquad (|\underline{r}|=1)$$

$(\underline{u}\cdot\underline{r})\,\underline{r}$ è il componente di $\underline{u}$ secondo la direzione della retta r

$|\underline{u}\cdot\underline{r}|$ è la lunghezza della proiezione stessa

$$|\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w})| =$$

$$= \left|\underline{u}\cdot\frac{(\underline{v}\wedge\underline{w})}{|\underline{v}\wedge\underline{w}|}\cdot|\underline{v}\wedge\underline{w}|\right| =$$ area × altezza del parallelepipedo

$= $ Volume

$\Rightarrow$ $\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w}) = 0$ $\Longleftrightarrow$ i 3 vettori sono complanari ([redacted] DIPENDENTI)

$$\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w}) = (u_1\underline{i}+u_2\underline{j}+u_3\underline{k})\cdot\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_1\underline{i}+u_2\underline{j}+u_3\underline{k})\cdot\left(\underline{i}\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$ per le prop. comm. del prodotto scalare coincide con

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{Il prodotto misto ALGEBRICAMENTE}}$

Prodotto misto $\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w})$

$|\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w})|$ geometricamente esprime:

VEDI PAG PRECEDENTE

quindi si annulla se e solo se:

Se $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\underline{w}=(w_1,w_2,w_3)$

$$\underline{u}\cdot(\underline{v}\wedge\underline{w}) = u_1(v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w_1-v_1w_3)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)$$

$$=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$: DETERMINANTE DELLA MATRICE $\begin{pmatrix}\underline{u}\\ \underline{v}\\ \underline{w}\end{pmatrix}$

GEOMETRIA CON I VETTORI:

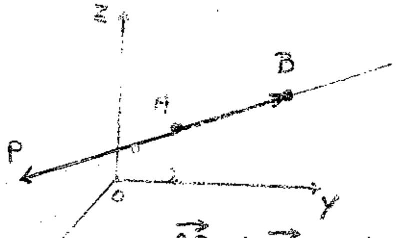
Equazioni parametriche della retta

una retta è nota:

- dati due suoi punti distinti $A=(x_0,y_0,z_0)$, $B=(x_1,y_1,z_1)$

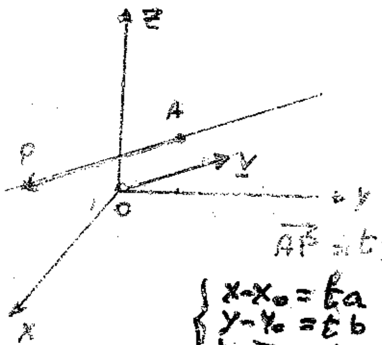
oppure

- dato un suo punto $A=(x_0,y_0,z_0)$ e una direzione $\underline{v}=(a,b,c)$ cui la retta è parallela



$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-x_0=t(x_1-x_0)\\ y-y_0=t(y_1-y_0)\\ z-z_0=t(z_1-z_0)\end{cases}$$



$\overrightarrow{AP}=t\underline{v}$ $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-x_0=ta\\ y-y_0=tb\\ z-z_0=tc\end{cases}$$

ESEMPIO

$A=(1,-1,1)$ $B=(0,1,-1)$

$P=(x,y,z)$

$\overrightarrow{AP}=(x-1,y+1,z-1)$ $\overrightarrow{AB}=(0-1,1+1,-1-1)$

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$(x-1,y+1,z-1)=(-t,2t,-2t)$

$$\begin{cases} x=1-t\\ y=-1+2t\\ z=1-2t\end{cases}$$ $\boxed{P=A+t\overrightarrow{AB}}$

Se voglio togliere il parametro

$t=1-x$

$$\begin{cases} y=-1+2(1-x)\\ z=1-2(1-x)\end{cases}$$

il legame tra le coord. (x,y,z) di ogni punto P che sta sulla retta è dato dalla ~~relazione~~ coppia di equazioni messe a sistema: