Eq. parametriche della retta

$$P = A + t\,\underline{v} \longrightarrow \text{VETTORE DIREZIONE} \qquad \underline{v} = \overrightarrow{AB}$$

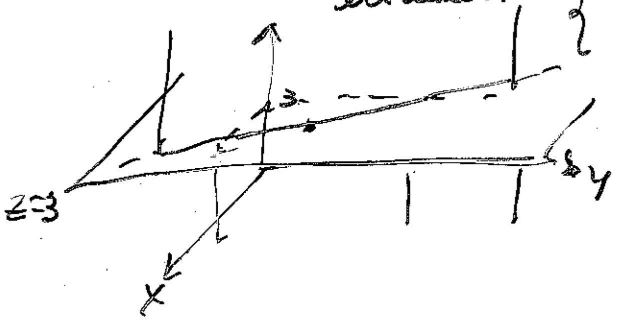
l'equaz. : $P = A + t\,\overrightarrow{AB}$
rappresenta la stessa retta
dell'eq.: $P = B + s\,\overrightarrow{AB}$

1) Eq. parametriche della retta per $A(2,1,3)$ con la direzione del vettore $\underline{v} = (1,-3,0)$

$$\begin{cases} x = 2 + t(1) \\ y = 1 + t(-3) \\ z = 3 + t(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 3 \end{cases}$$

elimino t!

$$\begin{cases} y-1 = -3(x-2) \\ z = 3 \end{cases}$$



$P = (2+t,\ 1-3t,\ 3)$

2) Eq. parametriche della retta per $A(3,1,2)$ e $\perp$ alle 2 rette di equazioni $r: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases}$

$s: \dfrac{x-1}{2} = 3y-1 = \dfrac{4z+1}{3}$

Devo
① cercare i vettori direzione di r ed s: $\underline{v}_r, \underline{v}_s$
② trovare un vettore $\underline{v} \perp$ sia $\underline{v}_r$ che a $\underline{v}_s$
③ scrivere l'eq. param. della retta.

① $r: (x,y,z) = (0,1,2) + (t,-t,2t) =$
$= (0,1,2) + t(1,-1,2)$
$P = B + t\,\underline{v}_r \qquad \underline{v}_r = (1,-1,2)$

$s: \underbrace{\dfrac{x-1}{2}}_{\text{solo } x} = \underbrace{3y-1}_{\text{solo } y} = \underbrace{\dfrac{4z+1}{3}}_{\text{solo } z}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 3y-1 \\ 3y-1 = \dfrac{4z+1}{3} \end{cases}$$ risolvere.....

$$\frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ 3y-1 = t \\ 4z+1 = 3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1/3 + t/3 \\ z = -1/4 + \frac{3}{4}t \end{cases} \qquad (24,4,9) \qquad \underline{v}_s = \left(2, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{4}\right)$$

② $$\underline{v} = \underline{v}_r \wedge \underline{v}_s = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3/4 \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1/3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3},\ -\tfrac{3}{4} + 4,\ \tfrac{1}{3} + 2\right) = \left(\tfrac{-17}{12}, \tfrac{13}{4}, \tfrac{7}{3}\right)$$

③ $A = (3,1,2)$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{17}{12}t \\ y = 1 + \frac{13}{4}t \\ z = 2 + \frac{7}{3}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - 17t \\ y = 1 + 39t \\ z = 2 + 28t \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta?

3) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + y - z = 2 \end{cases}$ sistema lineare di 2 equazioni (di 1° grado) in 3 incognite.

Rappresenta una retta?

Troviamo le soluzioni:

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 0 + y + 8y - z - 12z = 2 - 4 \end{cases}$ tolgo 4 volte la 1ª eq. alla seconda

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 9y - 13z = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = +\frac{2}{9}(13t-2) - 3t + 1 \\ y = \frac{1}{9}(13t-2) \\ z = t \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = \frac{5}{9} - \frac{1}{9}t \\ y = -2/9 + \frac{13}{9}t \\ z = t \end{cases}$ Sì: retta per $\left(\frac{5}{9}, \frac{-2}{9}, 0\right)$ con vettore direzione $(-1/9, 13/9, 1)$

4) Quali sono gli angoli che questa retta forma con gli assi x, y, z?

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

$$\cos \hat{rx} = \frac{(-1/9, 13/9, 1)\cdot(1,0,0)}{|(-1/9, 13/9, 1)|\cdot 1} = \frac{-1/9}{\sqrt{1/81 + \frac{169}{81} + 1}}$$

$$\cos \hat{ry} = \frac{13/9}{|(-1/9, 13/9, 1)|}$$

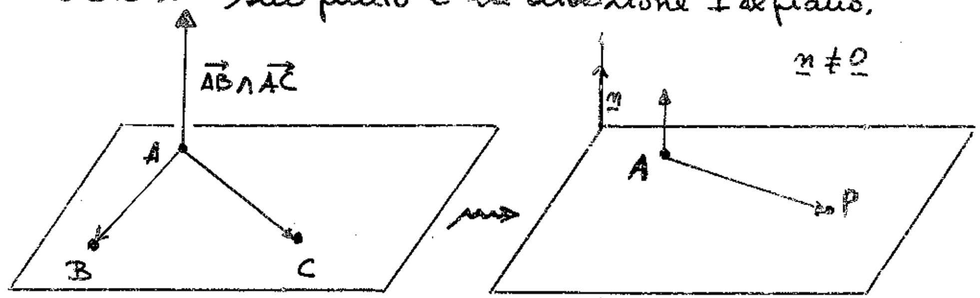
$$\cos \hat{rz} = \frac{1}{|(-1/9, \frac{13}{9}, 1)|}$$

si chiamano i coseni direttori della retta

Equazione cartesiana del piano

(Commento nelle 2 pagine successive)

Un piano è noto
- dati 3 suoi punti non allineati
- data 1 sua retta e un suo punto non appartenente alla retta
- dato un suo punto e la direzione ⊥ al piano.



$\vec{AP}$ è ortogonale a $\underline{n}$

$\underline{n} \cdot \vec{AP} = 0$

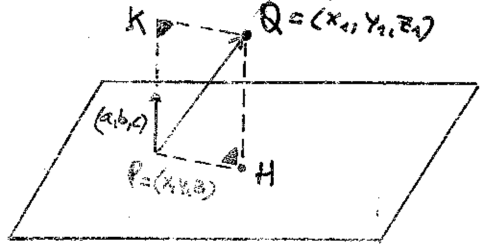
Se $\underline{n} = (a,b,c)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x,y,z)$:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

- $(a,b,c)\cdot(x_0,y_0,z_0) = 0 \Leftrightarrow$ il piano passa per l'origine
- $a = 0 \Rightarrow$ ecc.
- $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow$ ecc.

Distanza di un punto da un piano

(da una retta invece → ULTIMA PAGINA)



$$\overline{QH} = \overline{PK} = \frac{|\underline{n}\cdot\vec{PQ}|}{|\underline{n}|\cdot\cancel{|\vec{PQ}|}} \cdot \cancel{|\vec{PQ}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

con $(x,y,z) \in$ piano $\Rightarrow$

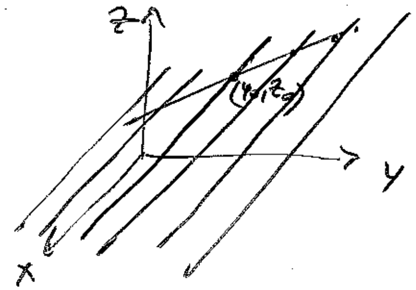
$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Significato del termine noto

se $|(a,b,c)| = 1$: rappresenta la distanza dall'origine a meno del segno

Che rappresenta l'equazione:

$b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$? $b(y-y_0) = -c(z-z_0)$



per ogni punto P della retta

$$\begin{cases} b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

considero una retta che passa per P ed è parallela all'asse x

$\Rightarrow$ il loro insieme è il piano di equazione $b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

infatti parametricamente

$$\begin{cases} x = h \\ y-y_0 = \frac{k}{b} \\ z-z_0 = -\frac{k}{c} \end{cases}$$

---

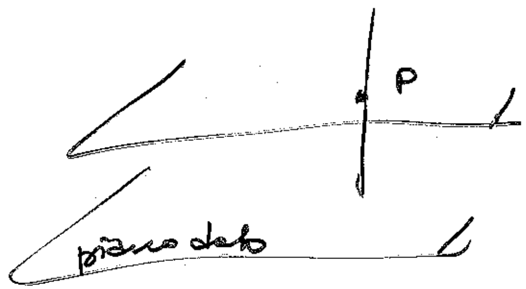
e la $c(z-z_0)=0$? è piano // al piano x,y

1) Piano parallelo a un piano dato (*) e passante per $P=(1,0,0)$

(*) $3x - 7y + 2z = 50$ (è l'eq di un piano?)

$3(x-0) - 7(y-0) + 2(z-25) = 0$ Sì

$\underline{v} = (3,-7,2)$ $A=(0,0,25)$

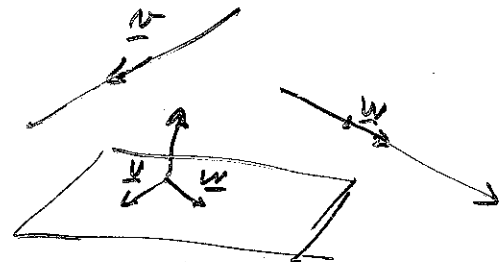


ugual vettore direzionale

$3(x-1) - 7y + 2z = 0$

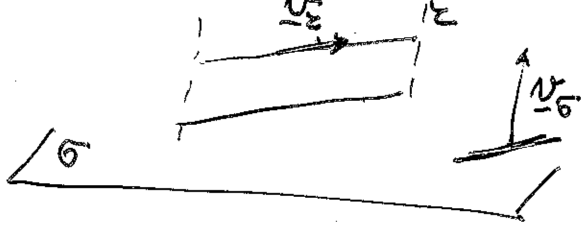
---

2) Piano parallelo a due rette date per un punto.



Vettore direzione del piano: $\underline{v} \wedge \underline{w}$

3) Piano σ parallelo a una retta r
e perpendicolare a un piano π
passante per un punto P

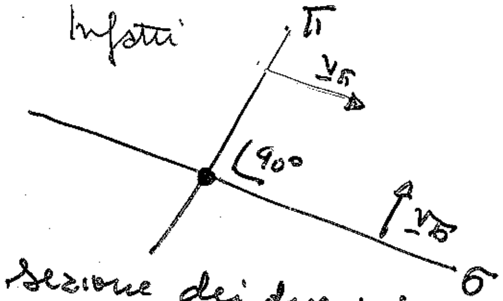


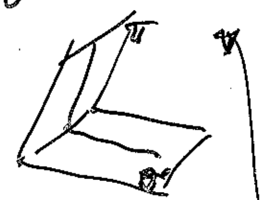
$\Rightarrow$ $\underline{v}_\sigma$ deve essere $\perp$ $\underline{v}_r$
poiché $\underline{v}_r$ giace nel piano σ
che è $\perp$ $\underline{v}_\sigma$

Condizioni:

(1) $\underline{v}_r \cdot \underline{v}_\sigma = 0$

Infatti





devono essere ortogonali

Sezione dei due piani
con un piano $\perp$ alla loro retta di intersez.

(2) $\underline{v}_\pi \cdot \underline{v}_\sigma = 0$

$$\begin{cases} \underline{v}_r \cdot \underline{v}_\sigma = 0 \\ \underline{v}_\pi \cdot \underline{v}_\sigma = 0 \end{cases}$$ risolvo ...

oppure pongo $\underline{v}_\sigma = \underline{v}_r \wedge \underline{v}_\pi$.

4) Piano per $A=(1,0,0)$ $B=(0,1,0)$ $C=(0,0,1)$

$\vec{AB} = (-1,1,0)$

$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k} = (1,1,1)$$

eq. piano

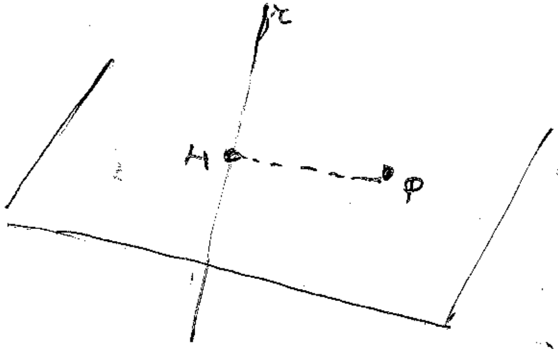
$$(x-1) + (y-0) + (z-0) = 0$$

$$\vec{AP} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{AP} \\ \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{vmatrix} = 0$$

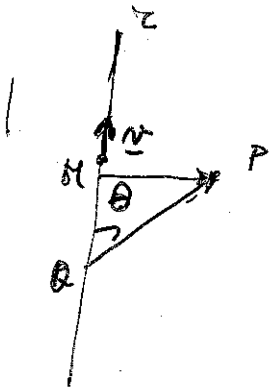
infatti i 3 vettori sono complanari e prodotto misto $=0$ significa proprio che i 3 vettori sono dipendenti, che in $\mathbb{R}^3$ significa complanari

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



nello spazio; distanza punto P - retta r.

(1) piano $\perp r$ passante per P
(2) Ne calcolo l'intersezione M con r
(3) Calcolo $\overline{PM}$



Oppure

$$|\underline{v} \wedge \overrightarrow{QP}| = |\underline{v}|\,|\overrightarrow{QP}| \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\underline{v} \wedge \overrightarrow{QP}|}{|\underline{v}|\,|\overrightarrow{QP}|}$$

$$\overline{PM} = |\overrightarrow{QP}| \cdot \frac{|\underline{v} \wedge \overrightarrow{QP}|}{|\underline{v}|\,|\overrightarrow{QP}|} = \frac{|\underline{v} \wedge \overrightarrow{QP}|}{|\underline{v}|}$$

ESERCIZI di INTEGRAZIONE

(1) $\int x^2 \ln(1-2x)\,dx =$

ID: $1-2x>0$, $x<1/2$, $(-\infty, 1/2)$.

= per parti con f.d. $x^2 dx$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1-2x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{-2}{1-2x}\,dx \overset{*}{=}$$

$$\cdot\frac{1}{3}\int \frac{2x^3}{2x-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\left[\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4(2x-1)}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln|2x-1|\right)+c$$

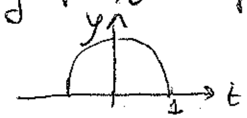
$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & 2x-1 \\ \hline -2x^3+x^2 & x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ x^2 & \text{quoziente} \\ -x^2+\frac{1}{2}x & \\ \frac{1}{2}x & \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & \\ \text{Resto } \frac{1}{4} & \end{array}$$

$$\overset{*}{=} \frac{x^3}{3}\ln(1-2x) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln(1-2x)\right) + C$$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$ se $a>0$ (altrimenti penso a $|a|$)

$$\int a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \boxed{\text{Sost. } x=at,\ dx=a\,dt} = \int a^2\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$y=\sqrt{1-t^2}$ ha per grafico una semiconferenza centrata in $(0,0)$ di raggio 1



$t=\cos z$ $\quad dt=-\operatorname{sen} z\,dz$

$\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\cos^2 z}=|\operatorname{sen} z|=\operatorname{sen} z$

poiché $z\in[0,\pi]$ ... qui la funzione coseno è invertibile

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt = \underset{\text{p.p.}}{\underline{\int -\operatorname{sen}^2 z\,dz}} = \cos z \operatorname{sen} z - \int \cos^2 z\,dz =$$

$$= \cos z\operatorname{sen} z - \int 1-\operatorname{sen}^2 z\,dz = \cos z\operatorname{sen} z - z - \underline{\int -\operatorname{sen}^2 z\,dz}$$

I due integrali sottolineati sono uno l'opposto dell'altro $\Rightarrow \int -\operatorname{sen}^2 z\,dz = \frac{1}{2}(\cos z\operatorname{sen} z - z)+c \Rightarrow$

$\boxed{\cos z = t,\ \operatorname{sen} z=\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow \int\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{t\sqrt{1-t^2}-\arccos t}{2}+c$

$$\Rightarrow \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(ax\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} - a^2\arccos\frac{x}{a}\right)+c$$