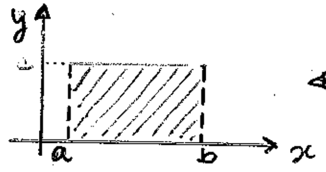
Integrale Definito (versione Cauchy-Riemann)

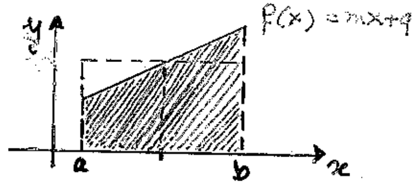
Come calcolare l'area di una figura mistilinea?
(o, corrispondentemente, come calcolare il LAVORO di una FORZA variabile nel tempo nello spostamento lungo una retta ... e analoghi problemi fisici?).

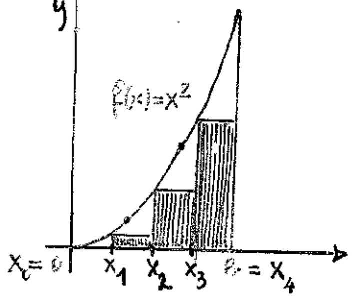
Cominciamo dal facile:



$\leftarrow \mathcal{A} = (b-a)\cdot|c|$

$$\mathcal{A} = \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a) \longrightarrow$$





$\boxed{n=4}$

METODO DI ESAUSTIONE

$\mathcal{A} \approx S_n$ = somma dell'area dei rettangoli di base $\frac{b-0}{n}$ e altezze: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$

Approssimazione per difetto.
Se la si vuole per eccesso prendere come altezze $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

$$S_4 = \frac{b}{4}\left(0^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3b}{4}\right)^2\right) = \frac{b}{4}\cdot\frac{b^2+4b^2+9b^2}{4^2} = \frac{b^3}{4^3}\cdot(1+4+9)$$

$$S_n = \frac{b}{n}\left(0^2+\left(\frac{b}{n}\right)^2+\dots+\frac{(n-1)^2 b^2}{n^2}\right) = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Si sa: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$

Se suddivido sempre più finemente posso pensare

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{3}$$

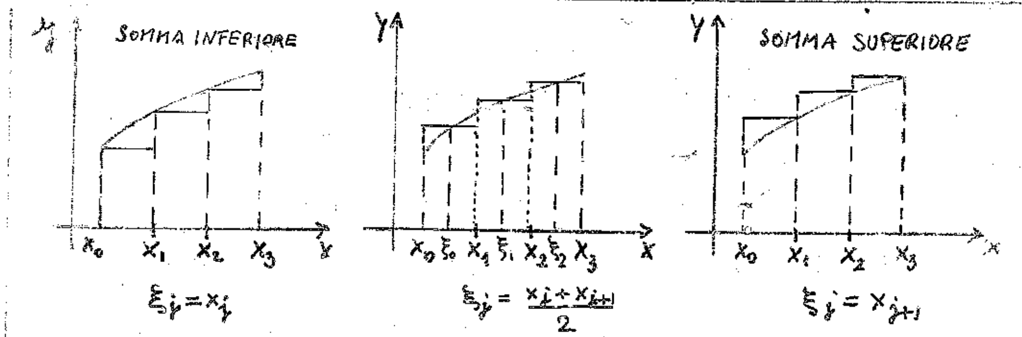
In generale, definisco un ente nuovo che servirà per calcolare le aree MA NON SEMPRE IN MANIERA AUTOMATICA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

- divido $[a,b]$ in n parti uguali (non fondamentale, ma rende i conti + facili) di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$
  Cioè considero in $[a,b]$ i punti
  $x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \dots,\ x_{n-1} = a+(n-1)h,\ x_n = b$
- in ogni intervallo $[x_0, x_1], \dots, [x_j, x_{j+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ scelgo un punto $\xi_0, \dots, \xi_j, \dots, \xi_{n-1}$
  (anche un estremo, se voglio)
- Calcolo

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\underbrace{(x_{j+1}-x_j)}_{h} = h\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) = (b-a)\,\frac{\sum f(\xi_j)}{n} = S_n$$

SOMMA di CAUCHY-RIEMANN



Tre diverse somme di Cauchy-Riemann

Si dimostra che esiste finito

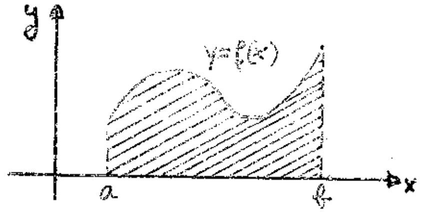
$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

e che tale limite è indipendente dalla scelta dei ξ_j.
Esso è detto integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e denotato

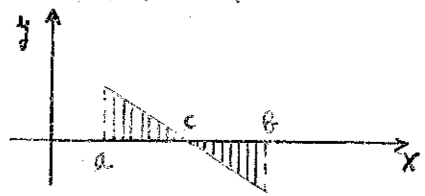
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Interpretazione geometrica

Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del TRAPEZOIDE racchiuso tra $y=f(x)$, l'asse x e le rette $x=a$, $x=b$

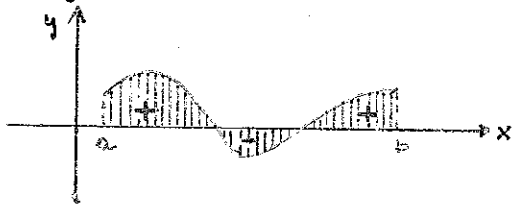


Ma se $f(x)$ cambia segno questo non è più vero



qui $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ mentre l'area no

Cioè l'integrale è la somma delle aree prese con il segno + se la regione sta sopra l'asse x e con il segno − se la regione sta sotto l'asse x



Per il calcolo delle aree VEDI DOPO.

Proprietà

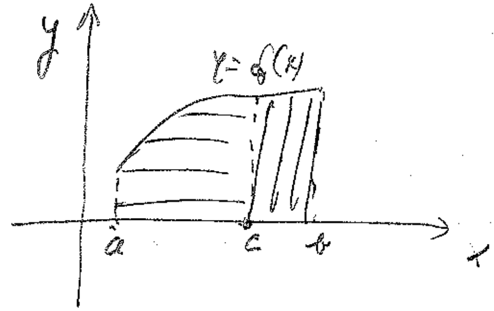
1. Additività degli intervalli di integrazione

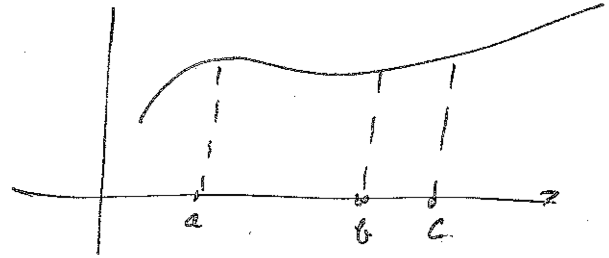
$\forall\, c \in [a,b]$: $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

È possibile generalizzare a un c esterno all'intervallo (purché f sia continua in $[c,b]$ se $c<a$, in $[a,c]$ se $c>a$)

definendo $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

1.





$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ ?$$

non so chi sia $\int_c^b f(x)\,dx$!!

perché $c > b$

Bisogna dare un significato a questa scrittura. Rileggo la figura.

b è intermedio tra a e c e quindi la proprietà data sopra porta:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

// DEF.

DEF: se $b < c$

$$\int_c^b f(x)\,dx =_{DF} -\int_b^c f(x)\,dx$$

e se $b = c$?

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^b f(x)\,dx$$

$$0 \underset{DF}{=} \int_b^b f(x)\,dx$$

Con queste 2 definizioni la formula di additività dell'intervallo di integrazione vale in ogni intervallo $[\bar a, \bar b]$ in cui la funzione è continua, per ogni scelta di un sotto-intervallo $[a,b]$ e di un punto $c \in [\bar a, \bar b]$

5. $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ $\qquad$ f, g continue in $[a,b]$

$$\Downarrow$$

$$g(x) - f(x) \ge 0 \overset{\text{positiv.}}{\Longrightarrow} \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \ge 0$$

additività delle funzioni

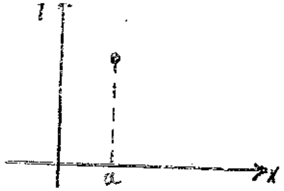
$$\Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

$$\Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

è l'analogo di

$$|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$$



2. Additività rispetto alle funzioni

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Omogeneità

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Positività

$\forall x\in[a,b]: f(x)\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ se $a<b$

5. (commentato sulla pag. prec.)

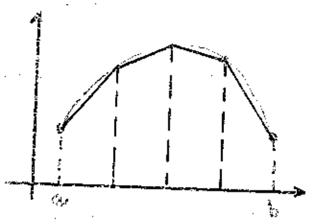
$\forall x \in [a,b]: f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

6.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Calcolo di integrali definiti

1. METODI NUMERICI. Per calcolare un'approssimazione dell'integrale piuttosto che usare somme superiori e inferiori è meglio usare il metodo dei TRAPEZI che consiste nel prendere ξ_j in modo che $f(\xi_j)$ sia $\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}$ (la funzione f è CONTINUA: vale il teorema dei valori intermedi) cioè nell'approssimare il grafico con segmenti che ne congiungono n+1 punti.



Allora

$$\bar S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right)$$

È come pesare $\frac{1}{2}$ sugli estremi e 1 nei punti interni

Poiché $\bar S_n \to \int_a^b f(x)\,dx$ si può approssimare l'integrale con la precisione voluta.

Ci sono anche altri metodi più sofisticati che convergono più velocemente (Cavalieri – Simpson ad es.).

2. METODO ESATTO.

Suppongo di essere in grado di calcolare una primitiva $G(x)$ della funzione integranda $f(x)$ in $[a,b]$:

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

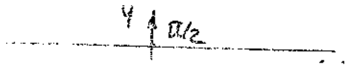
Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$

- cerco una primitiva $G(x)$ di $f(x)$
- calcolo $G(b)$ e $G(a)$
- sottraggo: $G(b)-G(a)$

ES. Calcolare $\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx$

Vedi pag. succ.

ES. Calcolare $\int_{-1}^{\sqrt3} \operatorname{arctg} x\,dx$



$$\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx =$$

in $[0,1]$ il denominatore è >0 poiché il den. è crescente e in zero vale 3

Cerco una primitiva di $\dfrac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}$ in $[0,1]$

$$(4e^x+2x^2-1)' = 4e^x+4x = 4(e^x+x)$$

$$\int \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(4e^x+2x^2-1)'}{4e^x+2x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(4e^x+2x^2-1\right)+c$$

$$G(x) = \frac{1}{4}\ln\left(4e^x+2x^2-1\right)$$

$$G(1)-G(0) = \frac{1}{4}\left(\ln(4e+2-1)-\ln(4+0-1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{(4e+1)}{(3)}\right)$$

In questo caso l' $\int^1 f(x)dx$ rappresenta l'area della regione compresa tra l'asse x, le rette $x=0$ e $x=1$ e il grafico di $f(x)$?

Sì perché $D>0$ in $[0,1]$

$N = e^x+x>0$ in $[0,1]$

$\Rightarrow \dfrac{N}{D}>0$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx$$

$$\int \arctan x\,dx =_{p.p.} x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$$= \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3}\arctan\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(4) +$$

$$-\left(-1\arctan(-1) - \frac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln 2$$

Senza fare conti, è >0 o <0?

È >0 poiché $f(x)$ è dispari e la parte negativa dell'intervallo di integrazione è meno ampia di quella positiva. Proprio perché è dispari e l'intervallo di integr. contiene 0, l' $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx$ è l'area ......

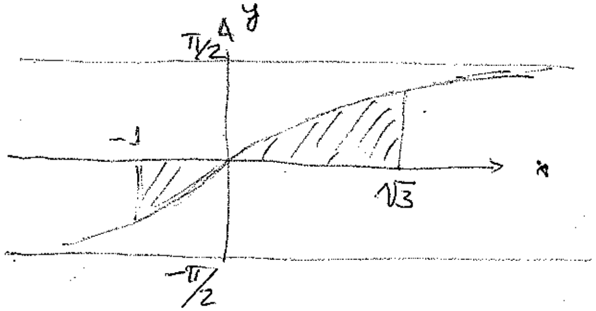
Area della regione compresa tra l'asse x, $x=-1$, $x=\sqrt{3}$ e grafico di arctan x:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx - \int_{-1}^{0} \arctan x \, dx =$$

$$\left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} +$$

$$\left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^{-1}$$

$$\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4\right) - g(0) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \dots$$

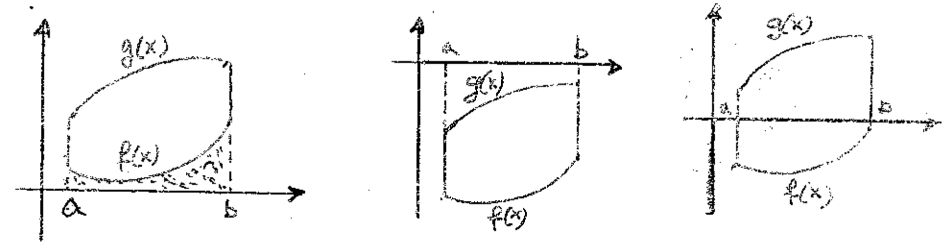


In generale per calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di 2 funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con

$$f(x) \le g(x) \quad \text{in } [a,b]$$

e le rette $x=a$, $x=b$, CALCOLARE

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$



eccetera ....

Se i 2 grafici si intersecano corrispondentemente a $x=c$ e
$g(x) \ge f(x)$ per $x \in [a,c]$
$g(x) \le f(x)$ per $x \in [c,b]$

Calcolare

$$\int_a^c (g(x) - f(x))\, dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Altri ESEMPI (AREA di REGIONI SIMMETRICHE)

1. Calcolare l'area del trapezoide delimitato dall'asse x e dalla funzione $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ nell'intervallo $[-1,1]$ (vedi pag succ.)
2. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra $y=x^3$ e $y=x^5$ nell'intervallo $[-1,1]$.
   COSA CAMBIA se scelgo l'INTERVALLO $[-1,2]$?

Area del trapezoide racchiuso tra

$x=-1$, $x=1$, asse x e il grafico di

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

È una funzione pari

$\boxed{\text{area} = \text{integrale def. tra } -1 \text{ e } 1}$

1°) Segno della funzione: sempre ≥ 0

2°) Calcolo primitiva.

$$\int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}$$

$$= \int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2\arctan t + c = 2\arctan(e^x)+c$$

3°) Calcolo integrale definito tra -1 e 1

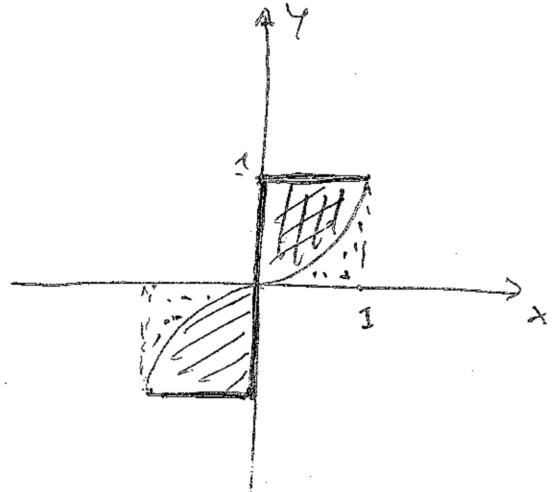
$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \left[2\arctan e^x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(\arctan e - \arctan e^{-1}\right) = \text{oppure}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = 4\left(\arctan e - \frac{\pi}{4}\right)$$

$(e^{2x}+1)' = 2e^{2x}$ non c'entra con e^x!!

Area regione compresa tra $y=x^3$, $y=-1$, $y=1$ e l'asse y



l'area è due volte l'area della regione compresa tra $y=x^3$, $y=1$ asse y. L'area di questa regione si ottiene per differenza dell'area del quadrato di lato 1 e dell'area del trapezoide "[illegible]"

$$2\left(1-\int_0^1 x^3\,dx\right) = 2\left(1-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\right) =$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{4}\right) = 3/2$$