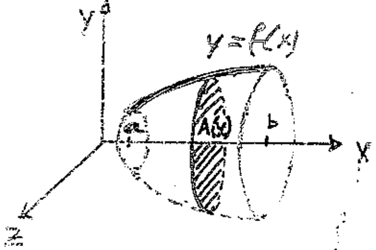
Qualche applicazione degli integrali definiti

1. Calcolo di aree (VEDI)

2. Calcolo del volume di un solido.

Se possibile conoscere il valore dell'area di tutte le sezioni del solido con piani ortogonali a una direzione fissa



il volume è ....

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

In particolare se il solido si ottiene per rotazione attorno all'asse x di $y = f(x)$ risulta

$$A(x) = \pi(f(x))^2$$

... il volume di ogni cilindretto: $dV = \pi\,(f(x))^2\,dx$

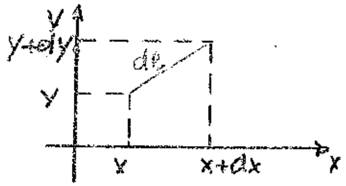
e quindi il volume totale: $V = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$

ES 1. $f(x) = \cos x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow V=$

Es. 2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$ $\Rightarrow V=$
(SEMISFERA)

3. Calcolo della lunghezza di un arco di grafico

Ipotesi: $f(x)$ e $f'(x)$ continue in $[a,b]$. Posto $y=f(x)$



$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\,(1+(f'(x))^2)} = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

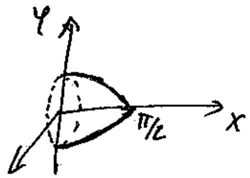
$\Rightarrow$ lunghezza dell'arco tra $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

ES. $f(x) = \mathrm{Ch}\,x$ con $a=0$, $b=b$

VEDI PAG SUCCESSIVA

$f(x) = \cos x$ $\quad a=0 \quad b=\frac{\pi}{2}$

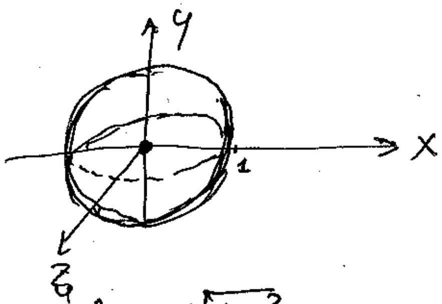


$$\int_0^{\pi/2} \pi\cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \qquad \mathrm{I}$$

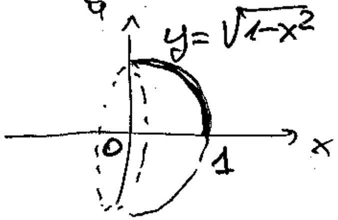
$$\int \cos^2 x\,dx = \cos x\,\mathrm{sen}\,x + \int \underbrace{\mathrm{sen}^2 x}_{1-\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \frac{\cos x\,\mathrm{sen}\,x + x}{2} + c$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\cos x\,\mathrm{sen}\,x + x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi^2}{4}$$



invece di calcolare il vol. della sfera, calcolo 2 volte il volume della semisfera contenuta nel semispazio delle $x \geq 0$



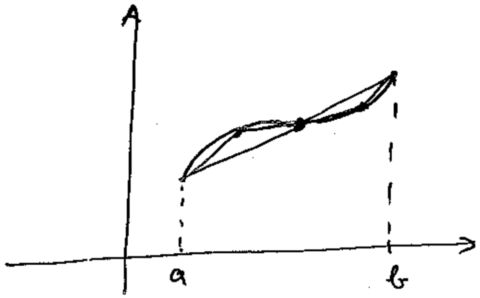
$$2\cdot\int_0^1 \pi\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx =$$

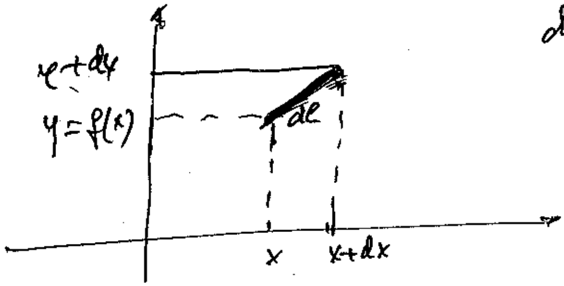
$$= 2\pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{2}{3}-0\right) = \frac{4\pi}{3}$$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

$\exists f'$ in $[a,b]$ e f' è continua in $[a,b]$



Vogliamo misurare la lunghezza dell'arco di grafico tracciato



$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} =$$

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

$$= dx\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

$$L_{arco} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$f(x) = Ch\,x \qquad a=0 \qquad b=1$

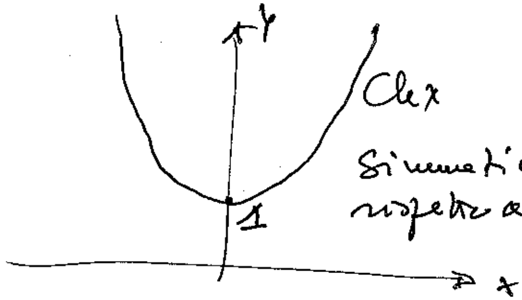
$Ch\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ Coseno IPERBOLICO cosh

$Sh\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ Seno IPERBOLICO senh

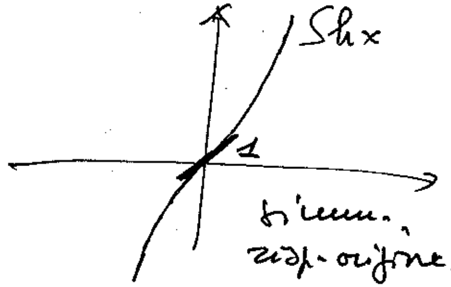
$$Ch^2x - Sh^2x = \frac{(\cancel{e^{2x}}+\cancel{e^{-2x}}+2\cdot 1)-(\cancel{e^{2x}}+\cancel{e}}{4}$$

$$= 1$$

$x^2 - y^2 = 1 \qquad \begin{cases} x = Ch\,t \\ y = Sh\,t \end{cases}$



Simmetrica rispetto a asse y



simm. risp. origine.

$$L_{arco} = \int_0^1 \sqrt{1+[(Ch\,x)']^2}\,dx$$

$$(Ch\,x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh\,x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-}{4}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{Ch^2x}\,dx = \int_0^1 Ch\,x\,dx = [Sh\,x]_0^1$$

$$= \frac{e^1-e^{-1}}{2} - \frac{e^0-\cancel{e^0}}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$

So calcolare

$$\int_c^x f(t)\,dt$$

c fissato in $[a,b]$, x variabile in $[a,b]$

La scrittura precedente è la legge che definisce una funzione da $[a,b]$ a $\mathbb{R}$? SI

Ad ogni $x \in [a,b]$ associo un integrale e un reale

$\int_c^x f(t)\,dt$ che è un numero reale

Questa funzione si chiama

FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

($f(t)$: FUNZIONE INTEGRANDA)

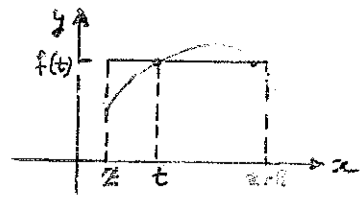
TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è CONTINUA su $[a,b]$ allora la "funzione integrale" $F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$ (dipendente dall'estremo di integrazione z e definita per ogni $c, z \in [a,b]$ ... per definizione di integrale) è DERIVABILE per ogni $z \in (a,b)$ e $F'(z) = f(z)$.

Dim. Bisogna provare: $\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$.

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \int_c^z f(x)\,dx \\ F(z+h) &= \int_c^{z+h} f(x)\,dx = \int_c^z f(x)\,dx + \int_z^{z+h} f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(x)\,dx$$

SE È VERO CHE per ogni z e h tali che z e $z+h \in [a,b]$ ESISTE un t tra z e $z+h$ tale che

$$\int_z^{z+h} f(x)\,dx = f(t)\,h$$



si ha

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{f(t)\,h}{h} = f(t)$$

e poiché t sta tra z e $z+h$, per $h \to 0$ si ha $t \to z$. Dunque

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{t \to z} f(t) = f(z).$$

per la CONTINUITÀ di f

È sostanzialmente il teorema del valor medio del calcolo integrale. L'unico problema è che h può essere >0 o <0

Nel primo caso O.K.

Nel secondo per il T. del V.M. esiste $t \in (z+h, z)$ tale che

$$\int_{z+h}^{z} f(x)\,dx = f(t)\,(z - (z+h)) = -f(t)\,h \Rightarrow \int_z^{z+h} f(x)\,dx = h f($$

O.K.

VEDI PAG. SUCC.

Dal teor. fondamentale del calcolo si ricava la formula per il calcolo esatto dell'integrale, poiché il teorema dice che in $[a,b]$ $F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$ è una primitiva di $f(z)$.

Allora se $G(z)$ è una primitiva "comoda" di $f(z)$, $G(z)$ e $F(z)$ differiscono per una costante k:

$$G(z) - F(z) = k \qquad \forall z \in (a,b)$$

In particolare

$$k = G(c) - F(c) = G(c) - 0$$

$\Rightarrow F(z) = G(z) - G(c)$

In particolare per $c = a$, $z = b$: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCOLO INTEGRALE.

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è CONTINUA in $[a,b]$, esiste $t \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(t)$.

Dim. Dalla continuità in $[a,b]$: $f(x)$ ha massimo M e minimo m: ASSOLUTI

$$m \le f(x) \le M$$

Proprietà degli integrali:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

Definizione di integrale:

$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot (\underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ volte}})$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

cioè

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Dalla continuità di f in $[a,b]$ (Teorema dei valori intermedi): esiste un $t \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(t).$$

c.v.d.

Qualche altro esercizio:

1. Il valore dell'integrale definito $\int_1^e (\ln x)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ è

   (a) -1 (b) $3/2$ (c) 0 (d) $e+1$ (e) $e-1$

2. L'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{3}$, dall'asse y e dalle rette $y=-9$ e $y=9$ è

   (a) $81/4$ (b) 13.5 (c) 0 (d) $= 40.5$ (e) 36

   (l'unità di misura è il quadrato di lato 1)

3. Quanto vale $\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{\sqrt{x}}\,dx$?

   (a) $\frac{8}{3} - \frac{5}{3}\sqrt{2}$ (b) $\frac{62}{5}$ (c) $-\frac{203}{2}$ (d) $\frac{242}{5}$

   (e) $\frac{10}{3}\sqrt{2} - \frac{14}{3}$

4. L'area della regione di piano compresa tra l'asse x il grafico di $f(x) = \frac{3(3\ln x - 1)^4}{2x}$ e le rette $x = e^{1/3}$ e $x = e$ vale

   (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{31}{3}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{1}{10}$ (e) $\frac{4}{5}$

5. Sia $f(x) = 5x^2(2x^3-1)^4$. L'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ vale

   (a) $-\frac{7}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{13}{3}$ (e) $\frac{5}{8}$.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b] \ni c$

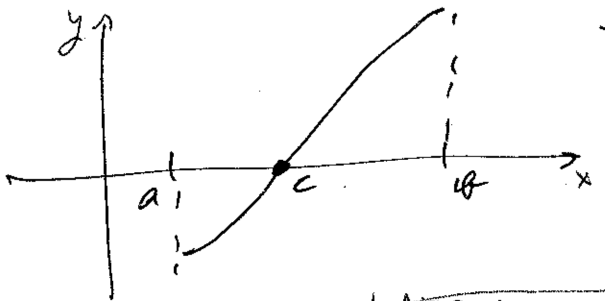
$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

Se $\underline{f(t) > 0}$ $\forall t \in [a,b]$ $\Longrightarrow F(x)$?

$$F'(x) = f(x) > 0$$

$\Rightarrow F$ è crescente in $[a,b]$

Segno di $F(x)$? $F(c) = 0$



$\Rightarrow$ $F(x) < 0$ in $[a,c)$ e $F(x) > 0$ in $(c,b]$

ALTRI MODI DI USARE IL TEOR. FOND. DEL CALCOLO

OSS.

$$H(x) = \int_x^c f(t)\,dt$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f cont. in $[a,b]$, $[a,b] \ni c, x$

$$H(x) = -\int_c^x f(t)\,dt = -F(x)$$

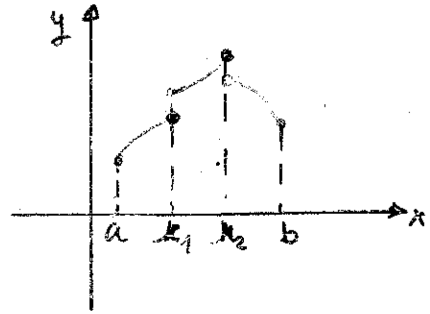
$$H'(x) = -f(x)$$

INTEGRALI GENERALIZZATI

1. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non è continua su tutto $[a,b]$ ma presenta solo un <u>numero finito</u> $k-1$ di discontinuità A SALTO definisco:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f(x)\,dx \quad \text{ove}$$

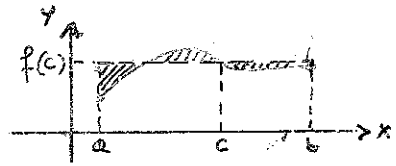
$z_0 = a$, $z_k = b$, $z_1, \dots, z_{k-1}$ sono i punti di discontinuità



Il calcolo può essere fatto sfruttando – su ogni intervallo in cui è continua – i metodi visti precedentemente.

ATTENZIONE. Ci sono due teoremi teoricamente fondamentali che valgono <u>SOLO</u> per funzioni continue:

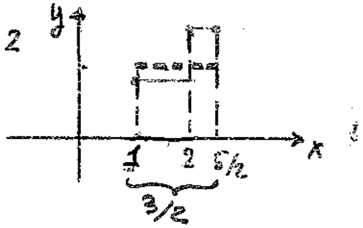
TEOR. DEL VALOR MEDIO: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ esiste $c \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$



TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è derivabile in (a,b) e $F'(z) = f(z)$.

Ad es. se $f(x)=\lfloor x\rfloor$ e $[a,b]=[1,5/2]$, posso calcolare

$$\int_1^{5/2} f(x)\,dx=\int_1^2 dx+\int_2^{5/2}2\,dx=1+1=2$$

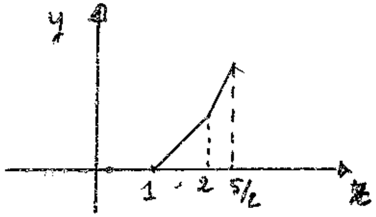


ma non esiste $c\in[1,5/2]$ t.c.

$$\int_1^{5/2} f(x)\,dx=\frac{3}{2}f(c)\Rightarrow f(c)\overset{?}{=}\frac{2}{3/2}\Rightarrow f(c)=\frac{4}{3}$$

Ancora: esiste la funzione $F(z)=\int_1^z f(x)\,dx=\begin{cases} z-1 & \text{se } 1\le z\le 2\\ 2z-3 & \text{se } 2\le z\le \frac{5}{2}\end{cases}$

ma in $x=2$ non è derivabile



2. $f(x)$ definita e continua in $[a,b)$ ma NON LIMITATA in $[a,b)$ $\left(\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty\right)$

Definisco l'<u>integrale</u> <u>generalizzato</u> (INT. IMPROPRIO DI II SPECIE)

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx:=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx=\lim_{z\to b^-}\int_a^z f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito (o infinito) dico che l'integrale generalizzato (IMPROPRIO di II specie) è CONVERGENTE (o DIVERGENTE) (ecc.: terminologia dei limiti)

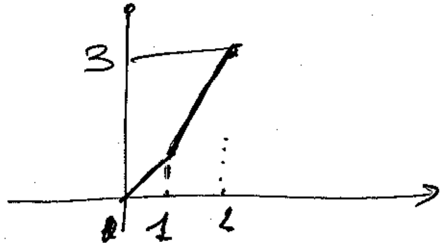
Esempio: $\displaystyle\int_{0^+}^b \frac{1}{x^k}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\ln|b|-\ln|\varepsilon|\\ \frac{b^{1-k}-\varepsilon^{1-k}}{1-k}\end{cases}=$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{INTEGR. DIVERG.}\\ \text{se } k>1 & +\infty\\ \text{se } k<1 & \frac{b^{1-k}}{1-k}\end{cases}$$

In realtà qui $f(x)$ è def. e continua in $(0,b]$ ....

Integrale di una funzione continua ma definita a pezzi:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[0,1]\\ -1+2x & \text{se } x\in(1,2]\end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

$f:(0,b]\to\mathbb{R}$ continua in $(0,b]$

$f(x)=\dfrac{1}{x^k}$ $\quad k\in\mathbb{R},\ k>0$

$$\int_{0^+}^b f(x)\,dx=\lim_{z\to 0^+}\int_z^b f(x)\,dx=\begin{cases} k=1: & +\infty\\ k>1: & +\infty\\ k<1: & (1-k>0)\quad \frac{b^{1-k}}{1-k}\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{x^k}\,dx=\begin{cases} k=1 & \ln|x|+c\\ k\neq 1 & \frac{x^{1-k}}{1-k}+c\end{cases}$$

$$\int_z^b\frac{1}{x^k}\,dx=\left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_z^b=\frac{b^{1-k}}{1-k}-\frac{z^{1-k}}{1-k}$$

$$\left[\ln|x|\right]_z^b=\ln b-\ln z$$