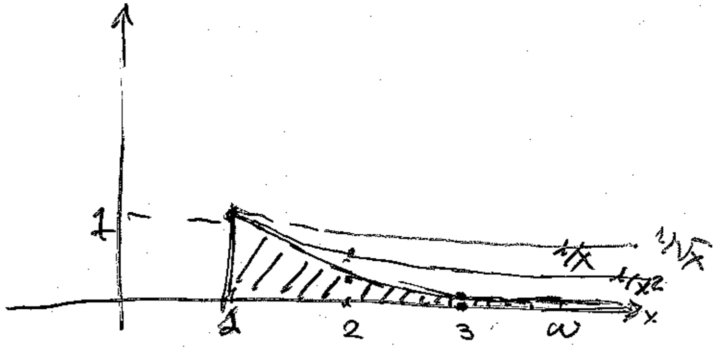
Ancora $\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\,dx =$ (vedi sotto ⇒)

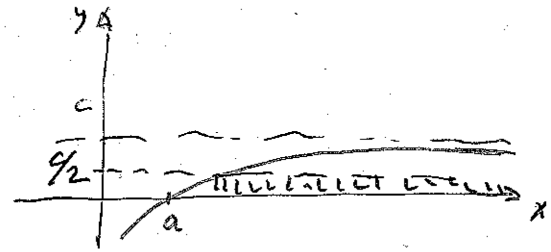
3. $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad$ f continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato.

Definisco l'integrale generalizzato (INT. IMPROPRIO DI I SPECIE)

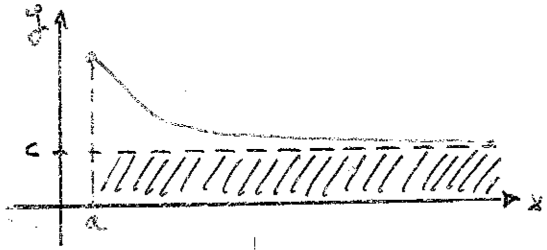
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\omega \to +\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

Esempio:
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k=1 : \lim\limits_{\omega\to+\infty} \ln|\omega| - \ln|a| = +\infty \\ k<1 : \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\omega^{1-k} - a^{1-k}}{1-k} = +\infty \\ k>1 : \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{1/\omega^{k-1} - a^{1-k}}{1-k} = \dfrac{a^{1-k}}{k-1} \end{cases}$$





NOTA BENE: perchè questo integrale converga (cioè perchè converga $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$) bisogna ALMENO che $f(x) \to 0$ allorchè $x \to +\infty$



l'esempio con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ è nella pagina a fianco

ES1. Si trovi il valore del seguente integrale generalizzato

$$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$

vedi pag. succ.

ES.2 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-\sqrt{x}}\,dx$

vedi tra 2 pagine

$$\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\,dx \qquad k>0$$

è definita per $2-x>0 \Rightarrow x<2$

I.D. $(-\infty, 2)$

$[0, 2)$ aperto a destra.

$$\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\,dx = \lim_{z\to 2^-} \int_0^{z} \frac{1}{(2-x)^k}\,dx$$

primitive:
- $k=1$: $-\ln|2-x|$
- $k\neq 1$: $-\dfrac{(2-x)^{1-k}}{1-k}$

integr. def per
- $k=1$: $-\ln|2-z| + \ln 2$
- $k\neq1$: $\frac{-1}{1-k}\left((2-z)^{1-k} - 2^{1-k}\right)$.

$\boxed{K=1}$ $\lim_{z \to 2^-} \ln 2 - \underbrace{\ln(2-z)}_{-\infty} = +\infty$

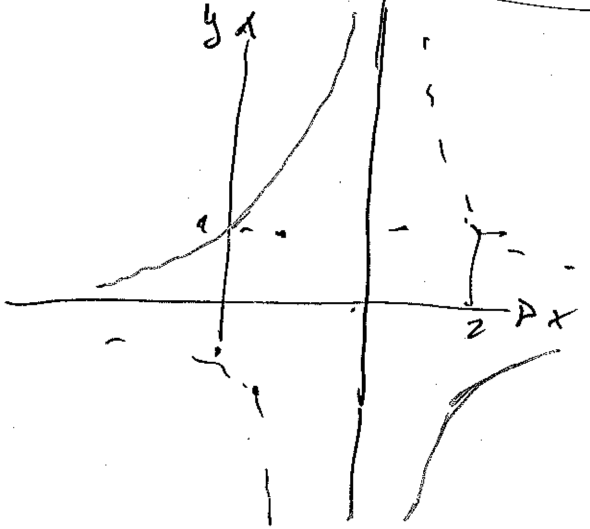
integr. divergente

$K > 1$ $\quad \frac{1}{k-1}\left((2-z)^{1-k} - 2^{1-k}\right)$ $\quad 1-k<0$ $\quad (2-z) \to 0$

integr. divergente $\to +\infty$

$\boxed{K<1}$ $\quad \frac{1}{1-k}\left(2^{1-k} - (2-z)^{1-k}\right)$ $\quad 1-k>0$ $\quad (2-z) \to 0$ $\quad \to 0$

$\boxed{\text{l'integrale converge a } \frac{2^{1-k}}{1-k}}$



$-\left(\frac{1}{x-2}\right)$

la ripartizione del problema è identica a quella vista per $\int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^k}\,dx$

Es 1. $\displaystyle\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$

Dove è definita e continua la funz.?

$[0,+\infty)$

È possibile porsi il problema del valore di quell'integrale improprio di I specie

Qual è il limite della funz. INTEGRANDA per $x \to +\infty$? è $1/2$

$\boxed{\text{Quindi l'integrale vale } +\infty}$

Infatti $\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ è positiva su $[16,+\infty)$

$\Rightarrow$ la funzione integrale $\int_{16}^{z} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$

è (crescente) monotona $\Rightarrow$ ha limite

e visto che il limite dell'integrando è $\neq 0$ il limite della funz integrale è $+\infty$

ES1 $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} x^{-1/2}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

Esame preventivo: $x>0$ (potenza con esp. <0!)

I.D. $(0,+\infty)$

in tale insieme la funz. è continua.

Integrale improprio di I e di II specie.

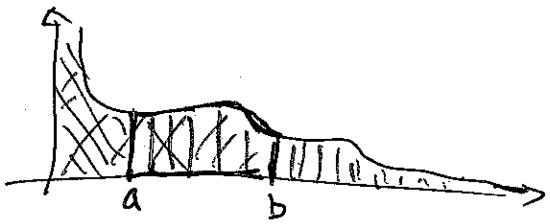
$(0,+\infty) = (0,\, a] \cup [a, +\infty)$

se gli integrali impropri

$$\int_{0^+}^{a} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

convergono convergerà anche la loro somma e quindi l'integ-dato.

la scelta di a è arbitraria



$\Rightarrow$ ad esempio scelgo $a=1$

Calcolo della primitiva

$$-2\int \frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx = -2e^{-\sqrt{x}} + c$$

$$\lim_{z\to 0^+} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_z^1 = -2e^{-1} - \lim_{z\to 0^+} -2e^{-\sqrt{z}} = 2-2e^{-1}$$

$$\lim_{z\to +\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^z = \lim_{z\to +\infty} -2e^{-\sqrt{z}} - \left(-2e^{-1}\right) = 0 + 2e^{-1}$$

Si somma: $2 - 2e^{-1} + 2e^{-1} = 2$ è l'integrale cercato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k}\, dx \qquad k>0$$

I.D. (e di continuità) : $(1,+\infty)$

funz. integranda è cont. in $[2,+\infty)$

$\Rightarrow$ è un integrale di I specie.

$$\lim_{z\to+\infty} \int_2^z \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \begin{cases} \boxed{k=1} \ \lim\limits_{z\to+\infty} \left[\ln|\ln z| - \ln|\ln 2|\right] = +\infty \\ \boxed{k\neq 1} \ \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{(\ln z)^{1-k} - (\ln 2)^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array}\right] \int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} k=1: \ \ln|\ln x| + c \\ k\neq 1: \ \dfrac{(\ln x)^{1-k}}{1-k} + c \end{cases}$$

se $k<1$: $+\infty$

se $k>1$: $\dfrac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1}$

Es. Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} e^{-x}\, dx$ (Svolgere)

Es. Quale delle seguenti uguaglianze è falsa?

(a) $\int_1^e x^{-2}dx = 1 - e^{-1}$ (b) $\int_{0+}^1 x^{-1/2}dx = 2$

(c) $\int_{-1}^e x^{-2}dx = -(1+e^{-1})$ (d) $\int_{1/2}^{+\infty} x^{-2}dx = 2$

(f) $\int_{-1}^1 |x|^{-1/2}dx = 4$

Es. Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Es. Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k}\, dx$ $(k \neq 1)$ vedi pag precedente

E $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$ che cosa fa? Converge o diverge?

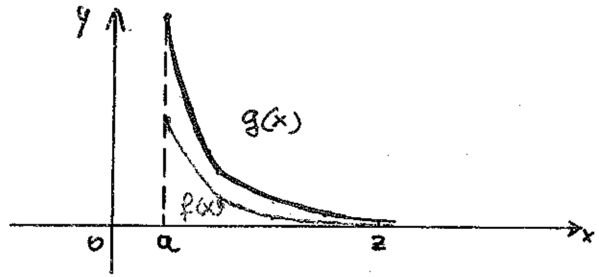
Non è facile calcolare una primitiva e quindi la funzione integrale e il suo limite per $z \to +\infty$.

L'idea è di procedere per CONFRONTO.

Ho una funzione $f(x) \geq 0$ $\Rightarrow F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è CRESCENTE

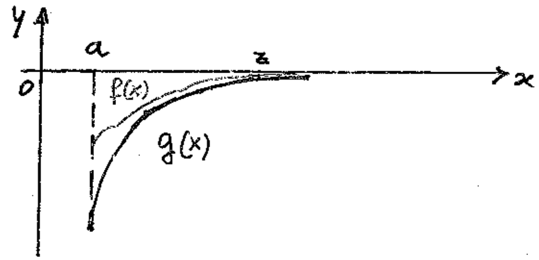
$\Rightarrow \lim_{z \to +\infty} F(z)$ esiste (finito o no)

Se esiste una funzione $g(x) \geq f(x)$ su tutto $(a, +\infty)$ e tale che $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito, allora (TEOR. del confronto) anche $\lim_{z \to +\infty} F(z)$ è finito



NOTA: l'area del TRAPEZOIDE di $g(x)$ è ma[ggiore] dell'area del TRAPEZOIDE di $f(x)$

Similmente se $f(x) \leq 0$ in $(a, +\infty)$ e $g(x) \leq f(x)$ su $(a, +\infty)$ con $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ finito, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge:



A rovescio: se $f(x) \geq 0$ e c'è una funzione $g(x)$ tale che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$ allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

(Tradurre nel caso negativo)

$x \in [2,+\infty)$ $\quad \frac{1}{x^2 \ln x} \leq \frac{1}{x^2} \iff \frac{1}{\ln x} \leq 1$

$\iff \ln x \geq 1 \iff x \geq e$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx = \underbrace{\int_2^{e} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx}_{\text{integr. di Cauchy-Riemann è un numero}} + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$$

Resta da esaminare $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$

In $[e,+\infty)$ si ha $\frac{1}{x^2 \ln x} \leq \frac{1}{x^2}$
sono entrambe ≥ 0 $\Rightarrow$ posso applicare il teor. del confronto:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{e} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$$

Però il metodo richiede di saper risolvere la disequazione, eventualmente suddividere l'intervallo di integrazione... Meglio osservare che fermo o poi, non mi importa per quale valore di x, visto che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \ln x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$, la funzione $\frac{1}{x^2 \ln x}$ diventerà $< \frac{1}{x^2}$. Generalizzando

Se $f(x) \geq 0$ (continua) in $[a,+\infty)$ e $g(x) > 0$ (continua) in $[a,+\infty)$ e se

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ finito
- $\lim_{z\to+\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è finito

INVECE se

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- $\lim_{z\to+\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

ADDIRITTURA se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ posso dire

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se converge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

VEDERE a pag. succ. un primo esempio

AD ES. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} 1 - e^{-z} = 1$$

e $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-x)} = 0.$

ES. $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx$ converge ($s \in \mathbb{R}$). Infatti:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^s e^{-x}}{x^{-k}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s+k}}{e^x} = 0$ $\forall k$ e in particolare per $k=2$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge anche l'integrale assegnato converge.

$$\int_{2^+}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)\sqrt{x-2}}\,dx \qquad (2,+\infty) \qquad f(x)>0$$

integr. improprio di I^a e II^a specie.

Criteri di confronto dopo aver spezzato l'integrale nella somma di 2 integr. uno di I e uno di seconda specie

$$\int_{2^+}^{4} \frac{1}{x(x-1)\sqrt{x-2}}\,dx + \int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)\sqrt{x-2}}$$

comincio dal secondo

per $x \to +\infty$ $f(x)$ è asintotica a ...

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x}} \qquad \left(\text{infatti se faccio il } \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x(x-1)\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}} = 1 \right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{x^{5/2}} \qquad 5/2 > 1 \quad \Rightarrow \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ criterio del confronto asintotico anche $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)\sqrt{x-2}}$ converge

(Non allo stesso limite!!)

anche per gli int. impr. di II specie vale il teor.: Siano f e g continue in $[a,b)$

se $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ e

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

allora se $\lim_{z\to b^-} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito

anche $\lim_{z\to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$ è finito

invece se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

e se $\lim_{z\to b^-} \int_a^z g(x)\,dx$ è infinito

anche $\lim_{z\to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$ è infinito

Quindi mi devo chiedere: per $x \to 2^+$ a chi è asintotica la funzione

$$\frac{1}{x(x-1)\sqrt{x-2}} \quad ? \sim \frac{1}{2\cdot 1\sqrt{x-2}}$$

$\int_{2^+}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\,dx$ converge e quindi

converge anche $\int_{2^+}^{4} \frac{1}{x(x-1)\sqrt{x-2}}\,dx$.

In maniera simile ci si comporta con gli integrali impropri di II specie:

ES. $\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^{s}\,dx$ è un integrale improprio solo se $s<0$

Ora $e^{-x}x^{s}>0$; $e^{-x}\to 1$ per $x\to 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}x^{s}}{x^{s}}=1$$

Allora, visto che $\int_{0^+}^{1} x^{s}\,dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$,

anche $\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^{s}\,dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$.

Dunque resta definita una funzione:

$$\Gamma(s)=\int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}x^{s}\,dx \qquad \forall s>-1$$

detta funzione di Eulero che è tale che

$$\Gamma(n)=\int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}x^{n}\,dx = n!$$

$$\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^{s}\,dx+\int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^{s}\,dx$$

Attenzione però a come si attuano i confronti

se il $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ma $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

non posso dire nulla sul fatto che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

converga o diverga. Ad es.

Supponiamo di fare il confronto tra

e^{-x^2} e $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x^2}}=0 \qquad \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=+\infty$$

ma da qui non posso dedurre niente circa ~~l'integrale~~ la finitezza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

perché la richiesta nel teorema era

- limite del rapporto finito
- limite della funzione integrale relativa alla funz al denom. finito

Analogamente, se $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, non posso dir nulla

sulla convergenza di $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

HO SCELTO UNA FUNZIONE DI CONFRONTO SBAGLIATA