Derivate successive

Supponiamo che $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ sia derivabile in ogni punto $x_0\in(a_1,b_1)\subseteq(a,b)$.
Resta definita una funzione

$$f':\ (a_1,b_1)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x_0\longmapsto f'(x_0)$$

che si chiama FUNZIONE DERIVATA di f.
Si possono allora cercare i punti x_1 di (a_1,b_1) in cui la funzione f' è derivabile cioè esiste finito

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(x_1+h)-f'(x_1)}{h}=(f')'(x_1).$$

Per semplicità si scrive f'' invece di $(f')'$ e si chiama $f''(x_1)$ derivata seconda di f in x_1.
Se in ogni punto $x_1\in(a_2,b_2)\subseteq(a_1,b_1)$ la funzione f' è derivabile, resta definita una nuova funzione

$$f'':\ (a_2,b_2)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x_1\longmapsto f''(x_1)$$

che si chiama funzione derivata seconda di f.

Proseguendo così, a partire dalla funzione derivata n-esima di f

$$f^{(n)}:\ (a_n,b_n)\longrightarrow\mathbb{R}$$

si può definire la derivata $(n+1)$-esima in un punto $x_n\in(a_n,b_n)$ come

$$\lim_{h\to0}\frac{f^{(n)}(x_n+h)-f^{(n)}(x_n)}{h}=f^{(n+1)}(x_n)$$

(se esiste finito).

ESEMPIO: calcolare le derivate successive di x^6.

Approssimazioni locali

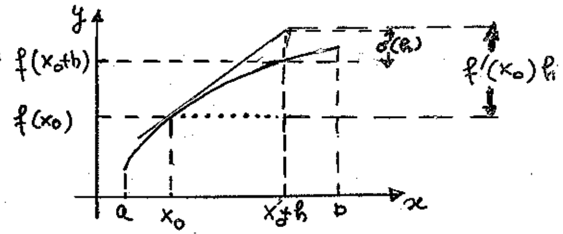
già visto: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e $x_0+h\in(a,b)$

$$* \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$$

ove $o(h)$ significa che

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}=0$$

Geometricamente:



... se $h\to0$ posso sostituire a $f(x_0+h)$ il valore $f(x_0)+h\cdot f'(x_0)$, ordinata del punto, sulla tangente in $(x_0,f(x_0))$, che ha ascissa x_0

Di solito si indica "l'incremento calcolato lungo la tangente": $hf'(x_0)$ con il simbolo df, differenziale di f in x_0.
Se $f(x)=x$, $f'(x)=1 \Rightarrow dx=h$. Si arriva così alla scrittura

$$df=f'(x_0)dx.$$

Altra cosa già vista:
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), esiste $c\in(a,b)$ t.c. $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$

e, se $x_0,\ x_0+h\in[a,b]$, esiste $c\in(a,b)$ t.c.

$$** \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(c)\cdot h$$

*, ** Sono due formule di approssimazione "locali" cioè valide in un "piccolo" intorno di x_0.

Voglio generalizzare. Perché?

- Calcolo di limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2} = ??$$

(*) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(x+o(x))-x}{(1+x)(x+o(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x)+x\,o(x)-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2} = ??$$

- Stima di "quel che trascuro"

Come generalizzo? [illegible] che la derivata seconda dà indicazioni sulla curvatura del grafico ("quanto il grafico è diverso da una retta?").

Mi chiedo: posso generalizzare ** utilizzando * come passo di partenza?

Cioè esiste un numero reale K tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + K h^2$$

Se sì

$$f'(x_0+h) = f'(x_0) + 2Kh.$$

La funzione f' è derivabile su (a,b) e continua su $[a,b]$?

Se sì il teorema di Lagrange dice che $\exists\, c\in(a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = f''(c)$$

intermedio tra x_0 e x_0+h

$\Rightarrow$ basta scegliere $K = \frac{1}{2}f''(c)$.

Concludendo:

(*) Questo esempio proviene dal calcolo e studio della derivata di $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$

TEOREMA di TAYLOR. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e

- esista f' in $[a,b]$, continua in $[a,b]$
- " f'' in (a,b)

Allora se $h>0$ esiste un $c\in(x_0,x_0+h)\subseteq(a,b)$

[" $h<0$ " " $c\in(x_0+h,x_0)\subseteq(a,b)$]

tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boxed{\tfrac{1}{2}f''(c)h^2}$$

Questa formula dice che nella formula

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \boxed{o(h)}$$

l'$o(h)$ che "trascuro" ha l'ordine di grandezza di h

In generale

TEOR. di TAYLOR (forma di Lagrange). Considero $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ t.c.

- $f, f', \dots, f^{(n)}$ siano continue in $[a,b]$
- esista $f^{(n+1)}$ in (a,b).

Sia $x_0\in(a,b)$ e $x_0+h\in(a,b)$. Allora

se $h>0$ esiste un $c\in(x_0,x_0+h)$

[" $h<0$ " " $c\in(x_0+h,x_0)$]

tale che

(▼) $$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.}$$

- Si dimostra di passo in passo come visto sopra.
- Come potrebbe venirmi in mente che ci sono quegli "STRANI COEFFICIENTI"?

Proviamoci con un polinomio!

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ in $x_0 = 0$ vale 1

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$ " vale 1

$f''(x) = 2 + 2\cdot 3x$ " vale $2 = 2!$

$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3$ " vale $3!$

I coefficienti dei monomi in $1 + x + x^2 + x^3$ sono tutti $= 1$
$\Rightarrow$ per compensare i valori assunti dalle derivate devo dividere $f''(0)$ per $2!$ e $f'''(0)$ per $3!$
Analogamente se il grado del polinomio fosse n e i coefficienti fossero più generali.

DEFINIZIONI

1) la ($\blacktriangledown$) è detta formula di Taylor (con il resto nella forma di Lagrange) con punto iniziale x_0, arrestata all'ordine n

2) $R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$ è detto resto $(n+1)$-esimo
è la parte importante di ($\blacktriangledown$): stima quel che trascuro

3) $P_n(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$
è detto polinomio di Taylor con punto iniziale x_0 di grado n
Se non tutte le derivate sono nulle rappresenta un'approssimazione di $f(x_0+h)$ (quanto buona è chiarito da $R_{n+1}(h)$)

4) Se $x_0 = 0$ la ($\blacktriangledown$) diventa

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

(con $0 < c < h$ se $h > 0$ o $h < c < 0$ se $h < 0$)
e si parla di formula di McLaurin.

Dal teorema di Taylor emerge che approssimando

$$f(x_0+h) \quad \text{con} \quad P_n(x_0, h)$$

ciò che si trascura è $o(h^n)$. Per usi pratici (CALCOLO di LIMITI) conviene ricordare anche questa forma del

TEOREMA di TAYLOR (forma di PEANO). Considero $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Se esistono $f', f'', \dots, f^{(n)}$ in x_0, per ogni $x_0 + h \in (a,b)$ si può scrivere

$$(\blacktriangle) \quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Questa è la cosiddetta forma QUALITATIVA del Teor. di Taylor mentre la precedente è QUANTITATIVA. Perché?

- Torno al calcolo di $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ Questi 2 esempi sono commentati nella penultima pagina

Miglioro l'approssimazione trovando la formula di McLaurin di e^x arrestata al II ordine (nella forma di Peano)

$f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ vale 1
$f'(x) = e^x$ "
$f''(x) = e^x$ "
$\Rightarrow e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

Visto che $x \to 0$ sostituisco $h = x$ e trovo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- Se invece voglio "calcolare" $e^{1/2}$ usando la sua approssimazione con il polinomio di McLaurin non è sufficiente rappresentare il resto così, perché voglio sapere se trascuro una parte troppo grande. So che $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{e^c}{3!}h^3$, $0 < c < \frac{1}{2}$: posto $h = \frac{1}{2}$, $\frac{e^c}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$: TROPPO?

Due modi di presentare il problema quantitativo

- Un modo è quello appena visto: se approssimo $e^{1/2}$ con $1+1/2+1/2\cdot(1/2)^2 = 13/8$ commetto un errore sicuramente $< \frac{1}{24}$ ma altrettanto sicuramente $> \frac{1}{48}$ poiché $c>0$ implica

$R_3 = \frac{e^c}{48} > \frac{e^0}{48} = \frac{1}{48}$.

- Secondo modo: voglio migliorare questa approssimazione in modo che l'errore che commetto sia sicuramente $< 1/100$. (ALTRO ESEMPIO in ultima pagina)

La formula di McLaurin (nella forma di Lagrange) arrestata all'ordine n è

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} h^{n+1}$$

ove, se $h = 1/2$, si ha $0 < c < 1/2$ ($\Rightarrow$ posso sempre pensare $e^c < 2$)

Devo trovare n in modo che

$$R_{n+1}(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{sia} < \frac{1}{100}$$

Vado per tentativi:

$n=2$ non va bene

$n=3$? $\quad R_4(1/2) = \frac{e^c}{4!}\cdot\frac{1}{16} < \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{8} < \frac{1}{100}$: $n=3$ va bene.

Cioè se scrivo $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}$ al posto di $e^{1/2}$ commetto un errore più piccolo di $\frac{1}{100}$ (ma $> \frac{1}{284}$) ....

(esemplificato in ultima pag.)

Polinomio di Taylor di un polinomio $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = A(x)$

Esistono tutte le possibili derivate. Notare in particolare che

$A^{(n)}(x) = n!\, a_n$ e $A^{(n+1)} = 0$. $\Rightarrow$ Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A(x) = A(x_0) + A'(x_0)(x-x_0) + \frac{A''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{n!\,a_n}{n!}(x-x_0)^n + 0(x-x_0)^{n+1}$$

Caso non polinomiale.

Calcoliamo i polinomi di MacLaurin di alcune funz. elementari, col resto nella forma di Peano (utili nel calcolo di $\boxed{\lim_{x\to 0}}$).

$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$f^{(2k)}(x) = \pm \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$

$f^{(1+4k)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(1+4k)}(0) = 1$

$f^{(3+4k)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3+4k)}(0) = -1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Similmente:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)}$$

poiché $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $D^2(\operatorname{tg} x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

$D^3(\operatorname{tg} x) = 2\frac{\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}$ etc. o (meglio) $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ecc

Ancora:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{Th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Fare le verifiche, ricordando che il punto iniziale è $x_0 = 0$.

DALLA TERZA PAGINA:

Come costruire il polinomio di MacLaurin di e^x? Organizzo così il calcolo

indice n	derivata n-esima: $f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^x	1	$1/0! = 1$
1	e^x	1	$1/1! = 1$
2	e^x	1	$1/2! = 1/2$
3	e^x	...	

formula di Taylor arrestata al 2° ordine con punto iniziale $x_0 = 0$ con il resto nella forma di Peano

$$e^x = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2 + o(x-0)^2 =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

È quel che serve per calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Invece se voglio calcolare una approssimazione di $e^{1/2}$ serve la formula corrispondente con il resto nella forma di Lagrange:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}e^c x^3$$

La calcolo per $x = 1/2$ e tengo conto che, per il Teorema, il punto c appartiene a $(0, \frac{1}{2})$

Allora

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{e^c}{3!}\cdot\frac{1}{8} = \frac{11}{8} + \frac{e^c}{6\cdot 8}$$

e se approssimo $e^{1/2}$ con $\frac{11}{8}$ commetto un errore $\frac{e^c}{6\cdot 8}$ che, dato che la funzione esponenziale è crescente e $0 < c < 1/2$ è compreso tra $\frac{e^0}{48}$ e $\frac{e^{1/2}}{48}$.

Non so quanto vale $e^{1/2}$ ma certamente

$e^{1/2} < 2$ (se fosse $e^{1/2} \geq 2$, anche e sarebbe $\geq 2^2 = 4$ mentre so per il teorema di Nepero che $2 < e < 3$)

Dunque l'errore commesso è

$$\frac{e^c}{48} < \frac{e^{1/2}}{48} < \frac{2}{48} = \frac{1}{24}.$$

Questo strumento permette anche di trovare una approssimazione del numero di Nepero con la precisione voluta, in un numero di passi molto minore di quanto serva usando la succ. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(VEDI ANCHE QUARTA PAGINA)

Ad esempio, se voglio una stima del valore di e in modo che l'errore sia $< \frac{1}{10^3}$, osservo che la formula di MacLaurin di e^x arrestata all'ordine n con il resto nella forma di Lagrange è

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

la calcolo per $x=1$:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \quad e \quad 0 < c < 1$$

Osservo che e^x è funzione crescente e quindi

$$1 = e^0 < e^c < e^1 = e < 3$$

Quindi il resto R_{n+1} è compreso tra $\frac{1}{(n+1)!}$ e $\frac{3}{(n+1)!}$

Osservo che $6! = 720$ mentre $7! = 5040$

Quindi se $n = 5$

$$\boxed{\frac{1}{6!} < R_6} < \frac{3}{6!} \Rightarrow R_6 \text{ è } > \frac{1}{10^3}$$

e quindi $n=5$ non è sufficiente. Invece se $n=6$

$$\frac{1}{7!} < \boxed{R_7 < \frac{3}{7!}} = \frac{1}{1680} \Rightarrow R_7 < \frac{1}{10^3}$$

Quindi $n=6$ è il minimo intero tale che se arresto la formula all'ordine n, l'approssimazione di e presenta un errore $< 1/1000$.
(non posso scendere a 5)

Che cosa succede, invece, se calcolo la formula di Taylor di un polinomio di grado n arrestandolo all'ordine n?

Procediamo su un esempio

$$P(x) = 2 - 3x + x^2$$

1° caso) Calcolo il polinomio di MacLaurin di P(x) arrestato al secondo ordine

n	$P^{(n)}(x)$	$P^{(n)}(0)$	$P^{(n)}(0)/n!$
0	$2-3x+x^2$	2	$2/0! = 2$
1	$-3+2x$	-3	$-3/1! = -3$
2	2	2	$2/2! = 1$
3	0		

$$P(x) = 2 - 3x + 1 \cdot x^2 + \underset{\text{Resto}}{0}$$

Ho esattamente lo stesso polinomio con resto 0

2° caso) Polinomio di Taylor di P(x) arrestato al secondo ordine con punto iniziale $x_0 = 1$

n	$P^{(n)}(x)$	$P^{(n)}(1)$	$P^{(n)}(1)/n!$
0	$2-3x+x^2$	$2-3+1=0$	0
1	$-3+2x$	$-3+2=-1$	$-1/1! = -1$
2	2	2	$2/2! = 1$
3	0		

$$P(x) = 0 - 1\cdot(x-1) + 1(x-1)^2 + 0_{\text{Resto}}$$
$$= -(x-1) + (x-1)^2$$

Ho ancora un polinomio di 2° grado in $x-1$ (il resto è 0)

È un modo per passare dalla rappresentazione nella variabile x alla rappresentazione nella variabile traslata $x-1$