$\operatorname{Sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Polinomio di Maclaurin?

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{0!} - \frac{x}{1!} + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^{-x}	1	1
1	$-e^{-x}$	-1	-1
2	e^{-x}	1	$1/2!$
3	$-e^{-x}$	-1	$-1/3!$
	⋮	⋮	⋮

Si poteva evitare il calcolo dicendo che la form. di M.L. di e^{-x} è quella di e^t con $t = -x$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}\Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) +$$
$$-1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2}{3!}x^3 + \dots + \frac{2}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\right)$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Analogie con sen x (e differenze)

Polinomio di M.L. di $\ln(1+x)$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$1/(1+x)$	1	1
2	$-1/(1+x)^2$	-1	$-1/2$
3	$2/(1+x)^3$	2	$2/6 = 1/3$
4	$-6/(1+x)^4$	-6	$-6/24 = -1/4$
⋮	⋮	⋮	
n	$\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$	$(-1)^{n-1}(n-1)!$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots\dots \underset{\text{SERIE CONVERGENTE}}{=}$$

$$= \lim_{k \to +\infty}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right] = \ln 2$$

CALCOLO di LIMITI con TAYLOR.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} =$$

dove posso usare gli asintotici?
al denom. ho un prodotto di funz elementari di cui conosco l'asintotico $\Rightarrow$ non ho bisogno di approssimaz. migliori

$$(1+x)(\ln(1+x))^2 = (1+x)\left[x+o(x)\right]^2$$
$$\sim (1+x)\cdot x^2 \sim x^2.$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x+o(x)) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+x^2+o(x)+o(x^2)-\cancel{x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x)+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}$$

L'approssimaz non basta:

uso l'approssimazione arrestata al 2° ordine

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+x^2-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^2)-\cancel{x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Torniamo a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}.$$ Risulta $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x)$

Sostituisco questa approssimazione migliore solo dove serve

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x-x^2/2+o(x^2)) - x}{(1+x)\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-x^2/2-x^3/2+o(x^2)-}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Notare che $-x^3/2 = o(x^2)$ e quindi è stato "dimenticato"

Altro esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\mathrm{sen}\,2x+x^3)^3} :$$ approssimo $e^{x^2} = 1+x^2+o(x^2)$
$\mathrm{sen}\,2x = 2x+o(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2+o(x^2)-1-x^2+5x^4}{(4\cdot 2x+o(x)+x^3)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4+o(x^2)}{(8x+o(x))^3}$$

ATTENZIONE: $x^4 = o(x^2) \Rightarrow 5x^4+o(x^2) = o(x^2)$

Approssimazione insufficiente al numeratore

$\Rightarrow$ approssimo meglio: $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

Il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4/2+5x^4+o(x^4)}{8^3x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{11/2\,x^4}{8^3\,x^3} = 0.$$

<u>Una conseguenza dei teoremi di Taylor.</u>

Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ammette derivate $f',\dots,f^{(n)}$ in un intorno di x_0 e $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ ma $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0)>0$: x_0 è pto di minimo rel
$f^{(n)}(x_0)<0$: x_0 " " massimo rel

Se n è dispari f ha in x_0 un punto di flesso a tg orizz.

Infatti $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n + o(h^n)\dots$

Esercizi. Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\operatorname{sen} x^2}{(1-\cos x^2)^2}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x}{3x^2}$ [a pag succ]

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\operatorname{arctg}^2 x - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)$ [a pag. succ.]

Polin. di Mc L. di $\operatorname{sen} x^2$

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t = x^2$$

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) \qquad \text{È vero?}$$

n	$f^{(n)}(x)$	
0	$\operatorname{sen} x^2$	0
1	$2x\cos x^2$	0
2	$2(\cos x^2 - x\cdot 2x\operatorname{sen} x^2)$	2
3	$2(-2x\operatorname{sen} x^2 - 4x\operatorname{sen} x^2 - 4x^4\cos x^2)$	0
4	⋮	
5	⋮	
6	⋮	
7	⋮	

Completare la verifica!!

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{sen} x^2}{(1-\cos x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+x^6/3!+o(x^6)}{(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^4}{2}+o(x^4))^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen} x^2 &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)\\ \cos x^2 &= 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \boxed{\frac{t^4}{4!} + o(t^4)}\end{aligned}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^6/3! + o(x^6)}{\left(\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)^2}$$

gli infinitesimi contenuti negli $o(\ldots)$ sono trascurabili rispetto a x^6 e x^4

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^6/3!}{(x^4/2)^2} = +\infty$$

Determinare il polinomio di Taylor di $\ln x$ di 3° grado con punto iniziale $x_0 = 2$

Usando la formula di McLaurin con il resto nella forma di Lagrange valutare $\operatorname{sen}\frac{1}{3}$ in modo che l'errore commesso sia $< 1/10^3$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}-2x^2+o(x^2)-\cancel{2x}}{3x^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\ln(t+1) = t-\frac{t^2}{2}+o(t^2) : t=2x\\ &\ln(1+2x) = 2x-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\end{aligned}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left[(\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right] = (*)$$

$$\arctan x = \underbrace{x-\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

$$(\arctan x)^2 = \left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2 =$$

$$= x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{9}+o(x^6) =$$

$$= x^2-\frac{2x^4}{3}+o(x^4)$$ non basta per risolvere nel limite

$$(\arctan x)^2 = \left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)^2 =$$

$$x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}+\frac{2}{5}x^6-\frac{2}{15}x^8+\frac{x^{10}}{25}+o(x^6)$$

$$= x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{23}{45}x^6+o(x^6)$$

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left(\frac{23}{45}x^6+o(x^6)\right) = \frac{23}{45}$$

Polinomio di M.C. di

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$\alpha\in\mathbb{R}$ $(x>-1)$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1+x)^\alpha$	1
1	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	α
2	$\alpha(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)$
3	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
$\vdots$		$\vdots$
n	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$	$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)$

$\Downarrow$ $\alpha=1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3+o(x^3) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{1+2x} = 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{1+2x^2} = 1+x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^6+o(x^6)$$

Stabilire se la funzione scritta sotto è continua in $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^3}\left(\sqrt{1+2x^2} + \ln(1+x) - e^x\right) & \text{se } x\neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right]$. devo approssimare gli addendi

$$f(x) = \frac{3}{x^3}\Big(\cancel{1}+\cancel{x^2}-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$$
$$+\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
$$-\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\Big)$$

$$= \frac{3}{x^3}\Big(\frac{x^3}{6}\underbrace{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}_{o(x^3)}+o(x^3)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}+o(1)$$ ($o(1)$ significa "Tende a 0")

Quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ e quindi $f(x)$ è continua in $x=0$.

La funzione è derivabile in $x=0$? Se sì quanto vale la derivata?

Si consiglia di verificare la derivabilità calcolando il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{3}{h^3}\left(\sqrt{1+2h^2}+\ln(1+h)-e^h\right)-\frac{1}{2}\right]$$

ATTENZIONE: le approssimazioni usate sopra SICURAMENTE NON BASTANO perché porterebbero a scrivere

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}+o(1)-\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{o(1)}{x} \quad ???$$