Funzioni di PIÙ VARIABILI

Si hanno ogni volta che l'ESITO (dato in uscita) dipende non da 1 solo ma da 2 o PIÙ DATI DI INGRESSO

Es. 1 $\quad V = k\,\dfrac{T}{P}$ $\quad$ (k costante >0) : il volume di un gas perfetto dipende da temperatura e pressione

Es. 2 $\quad a = b\cdot h$ $\quad$: l'area di un rettangolo dipende dalla sua base e dalla sua altezza.

PER ORA CONSIDERIAMO SOLO FUNZIONI DI DUE VARIABILI.

È essenziale, per sviluppare successivamente la teoria, ORDINARE IN MODO UNIVOCO I DATI IN INGRESSO, cioè decidere che una certa variabile è da considerare come la PRIMA, un'altra come SECONDA ecc. Ciò non comporta un giudizio di importanza!

Ad es. nel caso del gas perfetto posso pensare T come la 1ª variabile e P come 2ª e allora scriverò

$$V = V(T,P)$$

o viceversa e allora scriverò $V = V(P,T)$. L'importante è che si resti fedeli alle scelte fatte.

Questa osservazione mette in luce che l'insieme di definizione di una funzione di 2 variabili è un insieme di coppie ordinate di numeri reali, cioè un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$.
(similmente se le variabili sono n (≥ 2), l'insieme di definizione della funzione è un s.i. E di $\mathbb{R}^n$)

Invece l'IMMAGINE di queste funzioni sarà ancora $\subseteq \mathbb{R}$.

FORMALMENTE:

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Una funzione reale di due variabili reali con insieme di definizione E

$$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una corrispondenza che a OGNI $(x,y)\in E$ associa UNO E UN SOL NUMERO REALE $z = f(x,y)$

GRAFICO: in $Oxyz$ si considera $\{(x,y,f(x,y)),\ (x,y)\in E\}$
Nei casi più comuni è una superficie che rappresenteremo più semplicemente scrivendo: $z = f(x,y)$.

Eso a pag. successiva!!

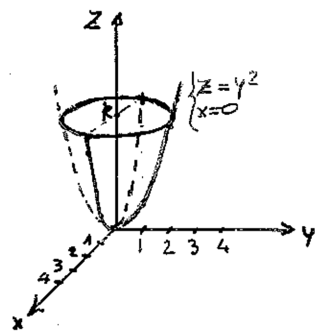
Es 1 $\quad z = x^2+y^2$: definita su tutto $\mathbb{R}^2$, a valori in $[0,+\infty)$

Per "vedere" il grafico osservo che

1) sezioni con piani $z=k$ $(k\geq 0)$ danno luogo alle circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2=k \\ z=k \end{cases}$

2) sezioni con i due piani coordinati $x=0$ e $y=0$ danno luogo rispettivamente alle parabole
$\begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$

... PARABOLOIDE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z.



Es. 2 $\quad z = x^2-y^2$: definita su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{R}$.

Operando come sopra: PARABOLOIDE A SELLA

Es. 0

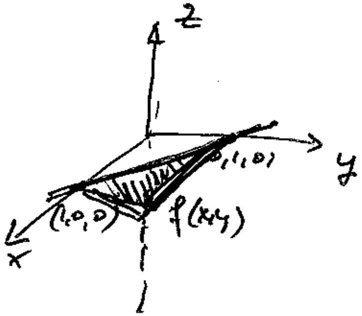
$f(x,y) = x+y-1$

$z = x+y-1$

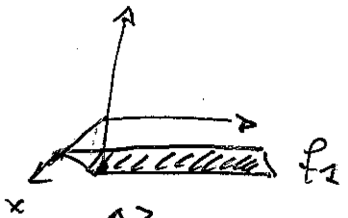
$\Downarrow$

$\boxed{x+y-z=1}$

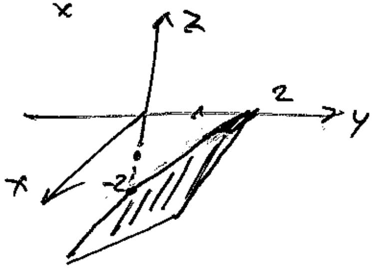
rappresenta un piano in $\mathbb{R}^3$



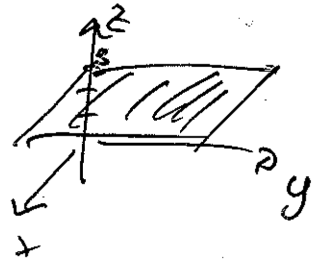
$f_1(x,y) = x-1 \Rightarrow z = x-1$



$f_2(x,y) = y-2 \Rightarrow z = y-2$

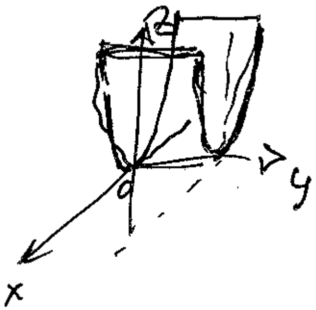


$f_3(x,y) = 3$



$f_4(x,y) = x^2$ $\quad z = x^2$

piano di simmetria Oyz



$f_5(x,y) = y^2$ piano di simm. Oxz

Es 2

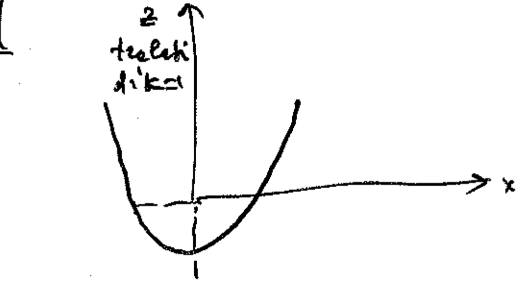
$z = x^2 - y^2$

intersecare con piani // Oxz significa

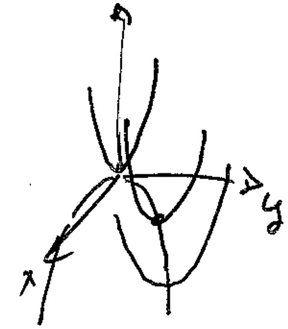
$$\begin{cases} z = x^2-y^2 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2-k^2 \\ y = k \end{cases}$$

$\boxed{y=k}$

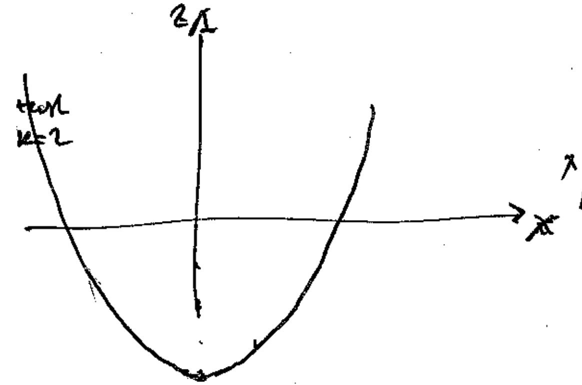
$k=1$



$z = x^2-1$



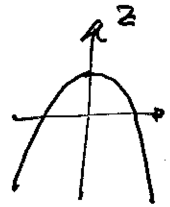
$k=2$

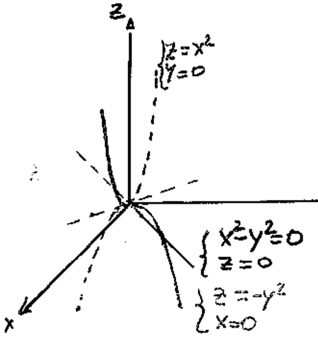


interseco con $x=k$ (piani //Oyz)

$$\begin{cases} z = x^2-y^2 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = k^2-y^2 \\ x = k \end{cases}$$

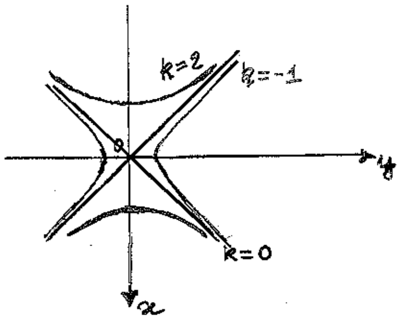
$k=1$





Non è facile leggere il grafico: conviene ad es. rappresentare la proiezione sul piano xOy delle curve che si ottengono per sezione con piani ⊥ asse z, della forma $z = k$

Si vede che per $k > 0$ le curve sono tutte disposte come l'iperbole rossa mentre per $k < 0$ sono disposte come l'iperbole verde e quindi in $(0,0)$ si viene a creare un'insellatura (... dov'è l'arcione? ... e le staffe?)



ES.3 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$: definita purché $1-x^2-y^2 \geq 0$.

quindi $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$: cerchio di raggio 1

i valori assunti sono contenuti in $[0,1]$

Si ha $f(x,y) = 0$ sul bordo (= circonferenza) di E

$f(x,y) = 1$ in $(0,0) \Rightarrow$

$(0,0)$: punto di massimo per la funzione

punti della circonferenza invece sono punti di minimo

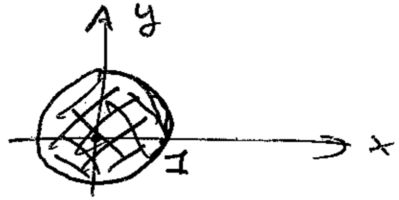
Il GRAFICO è una SEMISFERA.

ES. 4 $z = \sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$: definita purché $(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2) \geq 0$ cioè nei punti compresi tra le 2 circonferenze $(x-1)^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=4$

Sulle 2 circonferenze vale 0. Altrove >0. Ha UN MAX.?

ES3

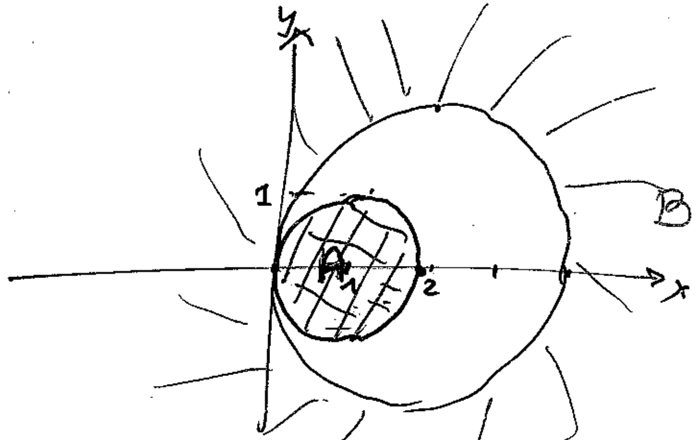
$1-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$



ES4

$(x^2+y^2-2x) \cdot (4x-x^2-y^2) \geq 0$

$g(x,y) = x^2+y^2-2x \geq 0$



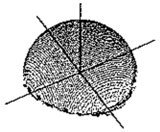
$h(x,y) = 4x - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-4x \leq 0$

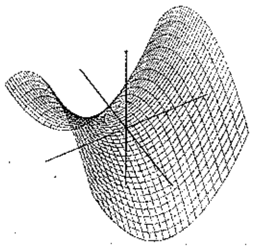
$\begin{cases} g(x,y) \geq 0 \\ h(x,y) \geq 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} g(x,y) \leq 0 \\ h(x,y) \leq 0 \end{cases}$

impossibile trovare un punto $(x,y) \in A \cap B$

Funzioni di due variabili

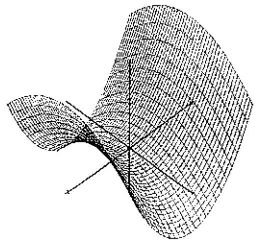
Es.3 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

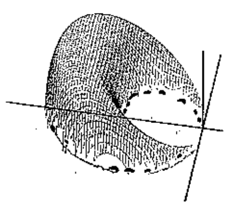


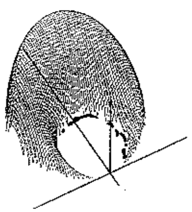


Es. 2

$f(x,y)=x^2-y^2$







ES4 : $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$

Figure fatte bene degli esempi precedenti

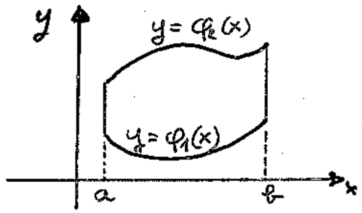
Cerchiamo di generalizzare la teoria vista in 1 variabile.

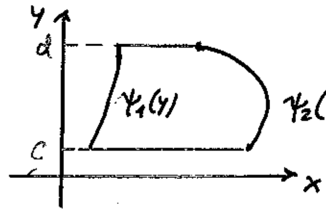
Anzitutto: come con funzioni di 1 variabile abbiamo ristretto l'attenzione a funzioni definite su intervalli (o loro unioni) qui la restringiamo a funzioni definite su "domini semplici" (o loro unioni finite) intendendo per <u>dominio semplice</u> un s.i. E di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<b$ e $\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)$ con φ_1,φ_2 continue in $(a,b$

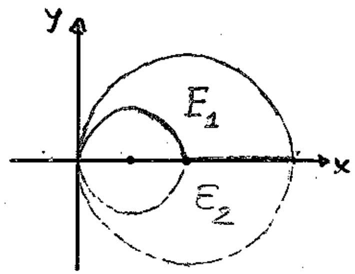
oppure

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c<y<d$ e $\psi_1(y)<x<\psi_2(y)$ con ψ_1,ψ_2 continue in $(c,d$





Nel caso dell'ultimo esempio.



l'insieme di defin[izione] è unione di due domini semplici E_1 ed E_2 del 1° tipo

Si dice che $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ se e solo se

PER OGNI $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ esiste $\delta=\delta(\varepsilon)$ $(\delta\in\mathbb{R},\delta>0)$ tale che

se $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ allora $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

Il concetto di limite è indipendente dal modo con cui il punto (x,y) si avvicina ad (a,b). In particolare il limite se esiste è unico.

Nell'esempio 4

$$\varphi_2(x) = \sqrt{x^2+y^2-4x} \quad \text{se } x\in[0,4]$$

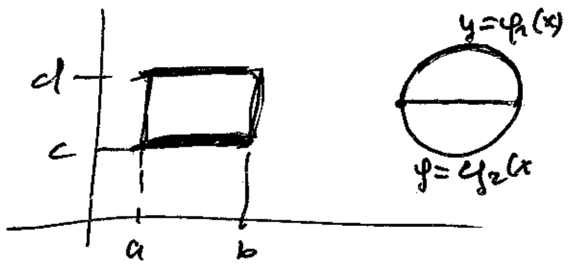
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x} & \text{se } x\in[0,2] \\ 0 & \text{se } x\in(2,4] \end{cases}$$

Sono le funzioni che delimitano E_1

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 4 \ ; \ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\} = E_1$$

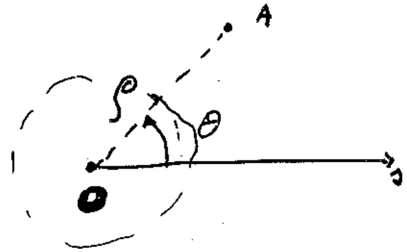
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 4 \ ; \ -\varphi_2(x)\le y\le -\varphi_1(x)\} \quad E_2$$

La forma più semplice di domini elem. sono rettangoli e cerchi



Per affrontare i limiti in due variabili può essere utile la nozione di

Coord. polari:



$\overline{OA}=\rho$

$\widehat{s\,OA}=\theta$

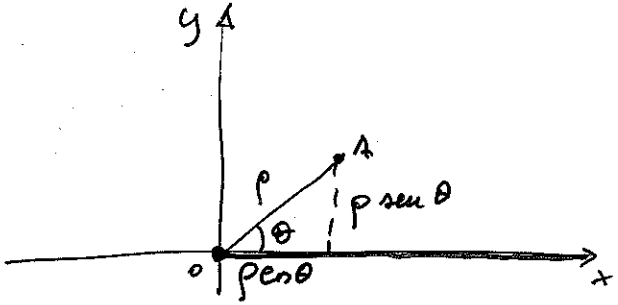
$A \longrightarrow (\rho,\theta)$

$\theta\in[0,2\pi)$

DIVERSO da O

a ogni punto A associo una e una sola coppia $(\rho,\theta)\in(0,+\infty)\times[0,2\pi)$

e viceversa ogni coppia individua univocamente un punto $\in\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$



$x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta.$

passaggio dalle polari alle cartesiane

Viceversa dalle cartesiane alle polari?

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\mathrm{sen}\,\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ES. 5 $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ per $(x,y) \to (0,0)$ tende a 1.

Infatti se passo in coordinate polari $(x=\rho\cos\theta, y=\rho\operatorname{sen}\theta)$ la funzione si riscrive $\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}$ ed è noto che $\lim_{\rho\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} = 1$

... o, se si preferisce, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. se $\rho = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ si ha $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} - 1\right| < \varepsilon$.

ES. 6 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non esiste</u>.

Per convincercene studiamo $f(x,y)$:

1) assume gli stessi valori in (x,y) e in $(-x,-y)$
2) " valori opposti in (x,y) e in $(-x,y)$ (o $(x,-y)$)

Quindi ci limitiamo a considerare

$$E = \{(x,y),\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ con } (x,y) \neq (0,0)\}$$

3) $2xy \leq x^2+y^2$ in E $\Rightarrow$ $0 \leq f(x,y) \leq 1$ in E
e $f(x,y) = 0$ sui semiassi delle x e delle y positive
$f(x,y) = \underline{1}$ se $x = y$

Già questo basta a dire che il limite proposto non esiste: infatti se mi muovo verso $(0,0)$ lungo la direzione degli assi, essendo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ trovo come CANDIDATO LIMITE: 0 ;
se invece mi muovo lungo $y = x$, essendo $f(x,x) = 1$ trovo come CANDIDATO LIMITE: 1. Sono diversi:
IL LIMITE non c'è.

VERIFICARE CHE $\forall\, k \in [0,1)$ c'è una coppia di semirette (simmetriche rispetto a $y=x$) del 1° quadrante sulle quali $f(x,y) = k$.

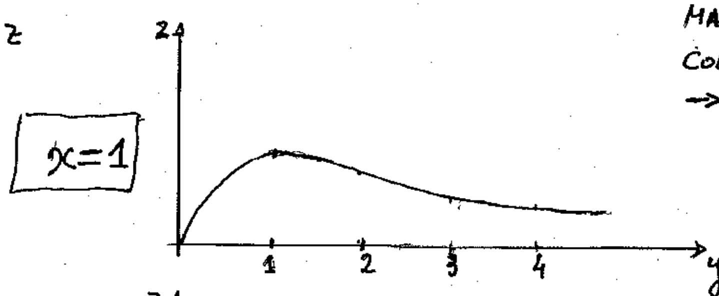
$f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

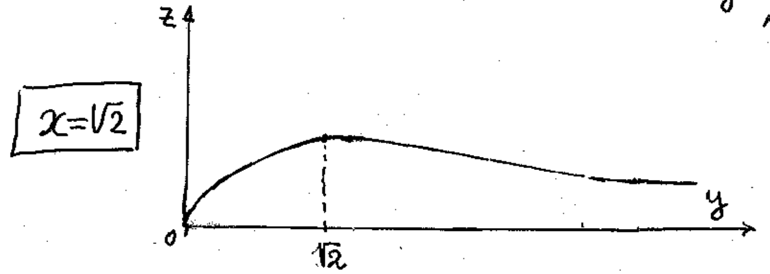
$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen} 2\theta$

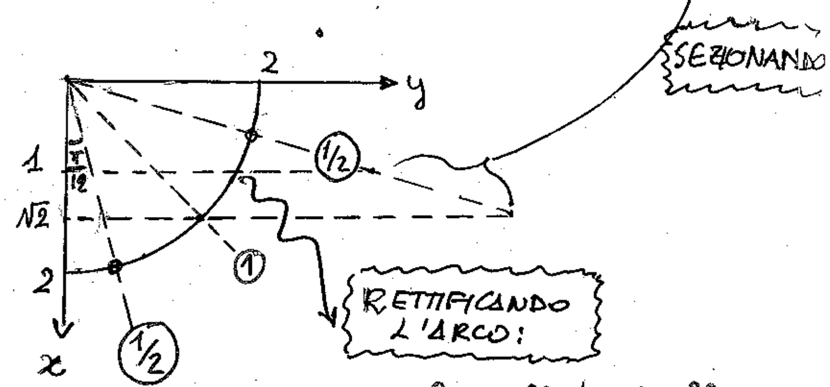
SEZIONI PARALLELE A yOz

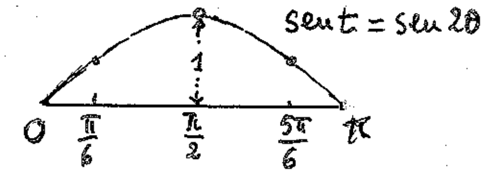
$f(a,y) = \dfrac{2ay}{a^2+y^2}$ $(a \neq 0)$; $f_y(a,y) = \dfrac{2a(a^2-y^2)}{a^2+y^2}$

MAX in $y = a$ (VAL
COEFF ANG. TANG
$\to 2a$ per $y \to 0$









ATTENZIONE: la situazione può anche essere più aggrovigliata (NON MOSTRATO A LEZIONE)

ES.7 $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$: anche qui i problemi sorgono per $(x,y)\to(0,0)$.

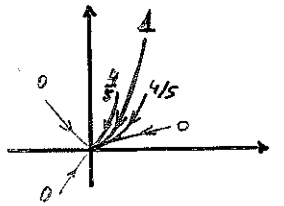
Se mi muovo lungo raggi uscenti dall'origine: $y=mx$, trovo $f(x,mx)=\dfrac{2mx^3}{x^4+m^2x^2}=\dfrac{2mx}{m^2+x^2}$

che vale 0 se $m=0$, mentre se $m\neq0$ tende a 0 per $x\to0$ (e $(x,mx)\to(0,0)$).

MA QUESTO NON BASTA A GARANTIRE L'ESISTENZA DEL LIMITE perché io posso andare verso $(0,0)$ lungo curve diverse.

Se ci vado lungo la parabola $y=kx^2$ trovo

$f(x,kx^2)=\dfrac{2kx^4}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{2k}{1+k^2}\neq0$ (se $k\neq0$, cioè se ho una vera parabola)



$k=1 \Rightarrow f(x,kx^2)=1$

$k=2 \Rightarrow f(x,kx^2)=4/5$

$k=1/2 \Rightarrow f(x,kx^2)=4/5$

Tutte le parabole entrano in $(0,0)$ TANGENTI a $y=0$ (retta su cui la funzione si annulla) ma con un piccolo contributo in più.

Questo esempio fa capire perché preferire l'(ε,δ)-definizione: permette di dimenticarsi di "COME" si entra nell'origine.

ES.8 Invece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

Si vede bene con le coord. polari!

Infatti

$|f(x,y)-0|=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\,|y|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$.

Dunque se prendo $\delta=\varepsilon$, ogni volta che $\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ anche $|f(x,y)-0|<\varepsilon$

$f(x,y)$ è detta continua in (a,b) se $f(x,y)$ è

- definita in (a,b) e in un suo intorno $U=\{(x,y):\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

Esempi di funzioni continue: 1, 2, 3, 4 ; 5 se completo la def. ponendo $f(0,0)=1$; 8 se completo la def. ponendo $f(0,0)=0$.

Per le funzioni continue in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ valgono teoremi analoghi a quelli delle funz. di 1 variabile. In particolare:

Sia $f: E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua su un sottoinsieme chiuso e limitato di E (ad esempio su un disco, circonferenza compresa). Allora

- l'immagine mediante f di tale s.i. limitato è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$
- esistono punti del s.i. chiuso e limitato di E in cui f assume valore massimo e valore minimo

L'esempio 1 e l'esempio 3 mostrano che l'ipotesi che E (o un suo sottoinsieme) sia limitato e sia chiuso sono entrambe necessarie.

Dagli esempi è chiaro che la continuità in dimensione >1 è cosa delicata. A maggior ragione lo sarà l'approssimazione lineare che vogliamo fare per studiare min. e MAX relativi.