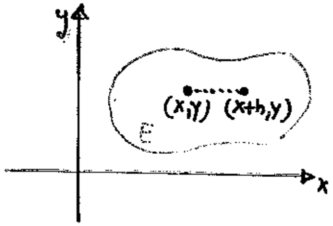
DERIVATE PARZIALI

$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in E. Siano



$(x,y) \in E$; $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo in valore assoluto perché $(x+h,y) \in E$.
Se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

dirò che esso è <u>la derivata parziale di f rispetto a</u> x nel punto (x,y) e la denoterò con

$$f_x(x,y) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{o} \quad D_x f(x,y)$$

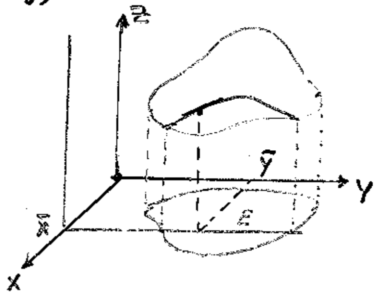
È come tenere fisso y in $f(x,y)$ e pensare f come funzione della sola x.

Analogamente se $k \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo in valore assoluto perché $(x, y+k) \in E$ ed esiste finito

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} := f_y(x,y)$$

dico che il limite è la <u>derivata parziale di f rispetto a y</u> in (x,y)

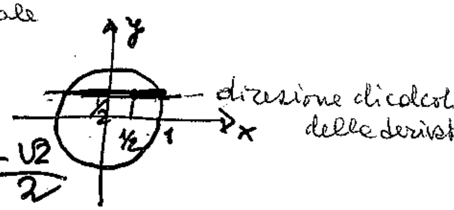
Ovviamente la derivata parziale di f rispetto a y in $(\bar{x}, \bar{y})$ è il coeff. angolare della retta tangente in $(\bar{x}, \bar{y})$ alla curva sezione del grafico di $f(x,y)$ con il piano $x = \bar{x}$
(similmente $f_x(\bar{x}, \bar{y})$)



Quindi $f_y(x,y)$ misura la velocità di variazione della quota $z = f(x,y)$ quando (x,y) si muove nella direzione dell'asse y ....

Esempio di calcolo di derivata parziale

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



Per trovare che

$$f_x(1/2, 1/2) = \frac{-1/2}{\sqrt{1 - 1/4 - 1/4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

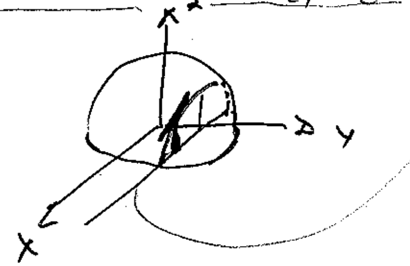
penso y costante :
$y = a$

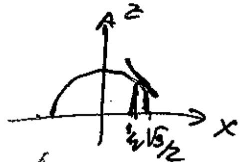
$$f(x,a) = \sqrt{1 - x^2 - a^2}$$ e derivo rispetto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2-a^2}\right) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2-a^2}}$$ poi risostituisco a=x

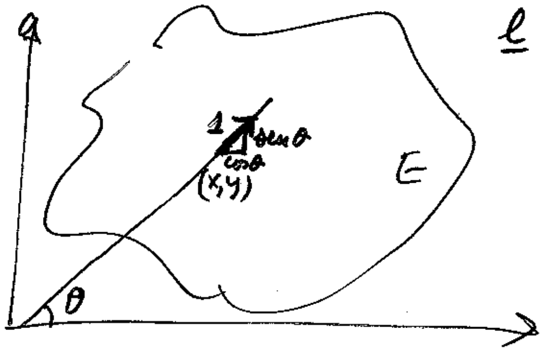
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

In questa funzione sostituisco $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$





riproduzione della sezione



$\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
la derivata in direzione $\underline{\ell}$ è il limite del rapporto incrementale al variare del punto da (x,y) a $(x,y) + h\underline{\ell} = (x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta)$

(Disegno che illustra la definizione a fine pagina successiva)

E se volessi la velocità di variazione della quota quando mi muovo in una direzione diversa da quella degli assi?

1ª oss. Se in (x,y) sono definite entrambe le derivate parziali, è definito un vettore che ha tali derivate come componenti. Esso sarà detto GRADIENTE di f in (x,y):

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

Es

$$f(x,y) = (x+y)e^{xy}$$
$$f_x(x,y) = e^{xy} + (x+y)(y e^{xy}) = e^{xy}(1+xy+y^2)$$
$$f_y(x,y) = e^{xy}(1+xy+x^2)$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = e^{xy}(1+xy+y^2,\ 1+xy+x^2)$$

Esso vale $(1,1)$ nell'origine e in generale $(1, 1+x^2)$ in $(x,0)$.

2ª oss. Supponiamo che in ogni (x,y) interno a E esistano le derivate f_x, f_y e siano funzioni CONTINUE in E.
Sia $\underline{\ell} = \underline{\ell}(x,y)$ un versore definito in (x,y).
La derivata di f nella direzione di $\underline{\ell}$ nel punto (x,y) è il prodotto scalare

$$(\operatorname{grad} f)\cdot \underline{\ell} := \frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(x,y)$$

Ovviamente $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{j}} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

NOTA Questa non è proprio la definizione di derivata direzionale... ma le è equivalente nelle ipotesi fatte.
In generale se $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ la derivata in direzione $\underline{\ell}$ di f in (x,y) è:

$$\frac{\partial f}{\partial(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}(x,y) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h\cos\theta, y+h\operatorname{sen}\theta) - f(x,y)}{h}$$

Vedi complementi alla pag. successiva

La derivata di f nella direzione $\underline{\ell}$ in (x,y) misura la velocità di variazione della quota muovendosi da (x,y) nella direzione del versore $\underline{\ell}$.
Detto α l'angolo tra $\operatorname{grad} f$ e $\underline{\ell}$ (nel punto (x,y)) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}} = \operatorname{grad} f \cdot \underline{\ell} = |\operatorname{grad} f| \cos\alpha$$

VEDI ILLUSTRAZ. PAG SUCC.

ed è quindi massima se $\operatorname{grad} f$ e $\underline{\ell}$ hanno ugual direzione e verso, minima se la direzione è = ma il verso opposto e nulla se sono ortogonali.
Dunque $\operatorname{grad} f$ calcolato in (x,y) dà la direzione di massima pendenza del grafico in (x,y); un versore ad esso ortogonale individua la direzione in cui non c'è variazione di pendenza ($\Rightarrow$ curva di livello ... cammino in quota)
Leggere una carta geografica in quest'ottica.

ATTENZIONE Una funzione di due (o più) variabili può avere derivate direzionali in tutte le direzioni in un certo punto e con tutto ciò NON ESSERE CONTINUA nel punto. Ad es.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(NON SVOLTO) non è continua in $(0,0)$ (vedi es. 7)

ma per ogni versore $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(0,0) = \lim_{h\to 0+}\left(\frac{2(h\cos\theta)^2(h\operatorname{sen}\theta)}{h^4\cos^4\theta + h^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{h^2\cos^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta}$$

che se $\operatorname{sen}\theta = 0$ vale 0

se $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ vale $2\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Ciò è legato alla non continuità delle derivate parziali in $(0,0)$
Ad es. $f_y = \dfrac{2x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} = \dfrac{2\rho^4(\cos\theta)^2(\rho^2\cos^4\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{\rho^4(\rho^2\cos^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta)^2}$
andando a $(0,0)$ lungo l'asse x $(\theta=0)$ si comporta come $2/\rho^2$ e quindi $\to +\infty$, mentre andandoci lungo l'asse y $(\theta=\frac{\pi}{2})$ tende a 0

PROSECUZIONE DEL DISCORSO SULLE DERIVATE DIREZIONALI

in particolare se la direzione è quella di x, come $\underline{\ell} = (1,0)$

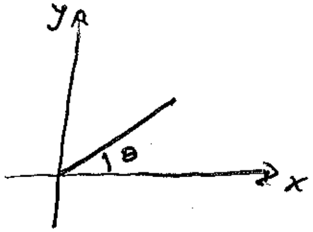
$$\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(x,y) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h\cdot 1,\ y+h\cdot 0)-f(x,y)}{h}$$

NEL PRIMO ESEMPIO:

$$\operatorname{grad}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)(x,y)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)=$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta.$$



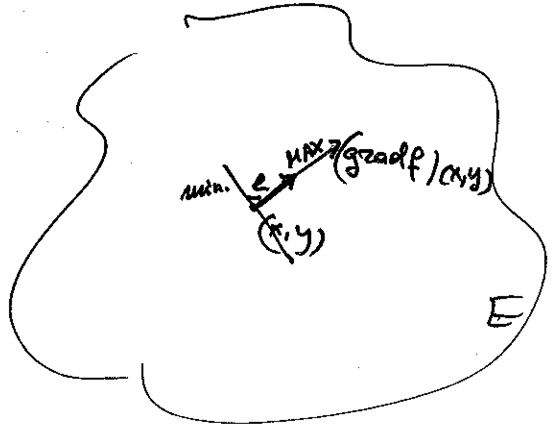
ES: $\theta=\frac{\pi}{6}$: la derivata direzionale risulta

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

ANCORA se $\underline{\ell}=\underline{i}$ o $\underline{\ell}=\underline{j}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{i}} = (\operatorname{grad} f)\cdot\underline{i} = f_x\cdot 1+f_y\cdot 0 = f_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{j}} = (\operatorname{grad} f)\cdot\underline{j} = f_y$$



$$\frac{\partial f}{\partial\underline{\ell}} = \operatorname{grad} f\cdot\underline{\ell}$$

è max se la direzione di $\underline{\ell}$ è quella del gradiente
è in val ass. minima se ℓ è $\perp$ al grad f

DIFFERENZIABILITÀ

Analogia con il caso di $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: se

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-hf'(\bar{x})}{|h|}=0,$$ risulta

$$f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-h\,f'(\bar{x}) = o(h)$$

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x})+\underbrace{f'(\bar{x})\,h}_{df(\bar{x})}+o(h)$$ differenziabilità in 1 variabile

$\Downarrow$

retta tangente in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$: $y-f(\bar{x}) = f'(\bar{x})(x-\bar{x})$

e d'altra parte: Continuità in $x=\bar{x}$ della funz. deriv.

Invece se – come abbiamo supposto parlando di gradiente – le derivate parziali f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ si riesce a ricavare un risultato $\boxed{\text{più forte}}$ della continuità di $f(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y})$. Precisamente

il motivo è spiegato dal precedente parallelo con il caso in 1 variabile

Se f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})-h f_x(\bar{x},\bar{y})-k f_y(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

cioè la funzione $f(x,y)$ è <u>differenziabile in</u> $(\bar{x},\bar{y})$

(e in tal caso è continua in $(\bar{x},\bar{y})$ poiché

$$(\bullet)\quad f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)=f(\bar{x},\bar{y})+h f_x(\bar{x},\bar{y})+k f_y(\bar{x},\bar{y})+o(\sqrt{h^2+k^2})\ \ldots)$$

Differenziabilità significa che in $(\bar{x},\bar{y})$ la funzione $f(x,y)$ può essere approssimata con un polinomio di 1° grado in x,y o – come si suol dire – può essere LINEARIZZATA.

Graficamente ciò significa che il grafico della funzione in prossimità di $(\bar{x},\bar{y})$ può essere approssimato con un piano "tangente" in $(\bar{x},\bar{y})$ al grafico. Tale piano ha equazione (vedi $(\bullet)$)

$$z-f(\bar{x},\bar{y})=f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})+f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}).$$

Notiamo che il suo vettore direzionale ha la forma

$$((\mathrm{grad}\, f)(\bar{x},\bar{y}) \mid -1).$$

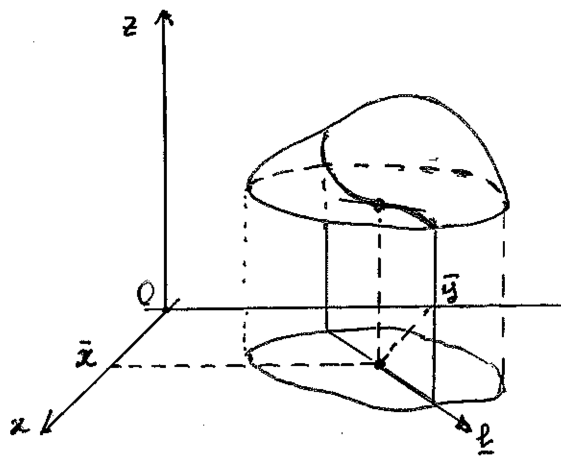
Es. $f(x,y)=x\ln(xy)$ (definita nel 1° e nel 3° quadrante)

$f_x=\ln(xy)+x\cdot\frac{1}{x}=\ln(xy)+1$; $f_y=\frac{x}{y}$

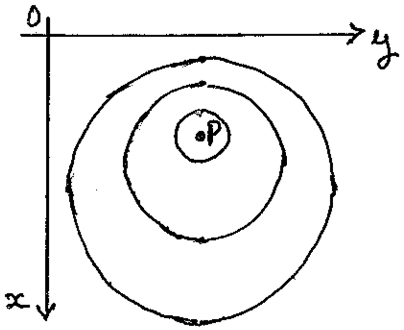
Il piano tangente al grafico nel punto di ascissa e ordinata 1 $(\Rightarrow f(1,1)=0,\ f_x=1,\ f_y=1)$ è

$z=(x-1)+(y-1).$

Derivata direzionale $f_{\underline{l}}(\bar{x},\bar{y})$



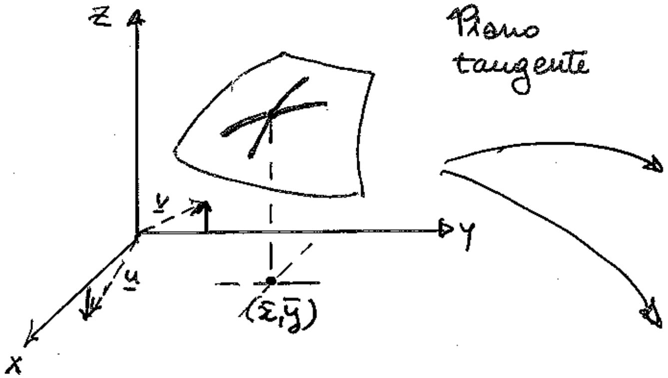
Curve di livello di $f(x,y)$

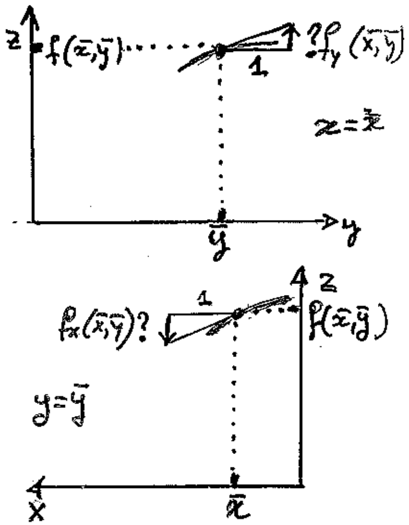


Gradiente:

Che cosa capita a una pallina posta in P e spinta lungo una certa direzione e verso?

Piano tangente





$\underline{u}=(1,0,f_x(\bar{x},\bar{y}))$

$\underline{v}=(0,1,f_y(\bar{x},\bar{y}))$

il vettore direzione del piano che contiene $\underline{u},\underline{v}$ è $\underline{u}\wedge\underline{v}$

Derivate seconde

Supponiamo che in ogni punto interno di E sia definita f_x e f_y e che queste funzioni abbiano derivate parziali rispetto a x e a y : nascono quattro derivate seconde

$$f_{xx} = (f_x)_x \quad , \quad f_{xy} = (f_x)_y \qquad f_{yx} = (f_y)_x \qquad f_{yy} = (f_y)_y$$

che talora vengono anche indicate così:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; , \; \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{\text{derivate miste}} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nell'esempio precedente : $f(x,y) = x \ln(xy)$, si ha

$$f_{xx} = (\ln(xy)+1)_x = \frac{1}{x} \quad ; \quad f_{xy} = (\ln(xy)+1)_y = \frac{1}{y}$$

$$f_{yx} = \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y} \quad ; \quad f_{yy} = \left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}$$

Notiamo che in questo caso $f_{xy} = f_{yx}$. Vale in proposito il

> TEOREMA di SCHWARZ : Se le derivate parziali f_x, f_y sono continue in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ e le derivate miste f_{xy} , f_{yx} sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$.

Ma consideriamo : (NON ESPOSTO A LEZIONE)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. In ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ RISULTA:

$$f_x(x,y) = 2\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad f_y(x,y) = 2\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2\,\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Ma in (0,0) - calcolando le derivate come lim. del rapp. incr. RISULTA:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0 \quad ; \quad f_y(0,0) = \dots = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-2k^5}{k^4 \cdot k} = -2 \; ; \; f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^5}{h^4 \cdot h} = 2$$

Le derivate miste in (0,0) sono diverse!! Ineffetti la funz. $f_{xy}(x,y)$ non è continua in (0,0)!

Ottimizzazione delle funzioni di 2 variabili

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(\bar{x},\bar{y})$ un punto interno ad E. Esso si dice punto di massimo locale se esiste un cerchio con centro in $(\bar{x},\bar{y})$ e raggio $\delta > 0$, contenuto in E

$$B_\delta(\bar{x},\bar{y}) = \{(x,y) \in E \mid \sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2} < \delta\}$$

tale che per tutti gli $(x,y) \in B_\delta(\bar{x},\bar{y})$ diversi da $(\bar{x},\bar{y})$ si abbia

$$f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y})$$

Analogamente per il minimo locale.

Si dice che il massimo (o il minimo) è forte se vale $\lneq$ (

Vale un analogo del teorema di Fermat (in 1 variabile):

TEOR. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con f_x, f_y continue in $(\bar{x},\bar{y})$, punto interno a E. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ la f ha massimo locale (o minimo locale) allora il gradiente di f in $(\bar{x},\bar{y})$ è nullo.

La cosa è abbastanza logica, poiché mi aspetto che ci sia un piano tangente e mi aspetto che tale piano sia // xOy. Il teorema precedente è una condizione necessaria: dice tra quali punti cercare gli estremi locali (qualora f sia differenziabile). I punti a gradiente nullo sono detti PUNTI CRITICI : tra essi bisogna distinguere i veri punti estremanti dai punti di sella. Allo scopo si possono guardare le derivate seconde : l'idea che c'è dietro è che si può migliorare l'approssimazione lineare di $f(x,y)$ usando un polinomio di 2° grado invece che di primo:

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k + f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{h^2}{2} +$$
$$(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{yx}(\bar{x},\bar{y}))\frac{hk}{2} + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{k^2}{2} + o(h^2+k^2) \;???$$

Proviamo a capire che cosa succede quando $f(x,y)$ è proprio un polinomio di 2° grado

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ ha minimo locale (e globale) in $(0,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = 2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 2$

2. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ ha massimo locale (e globale) in $(0,0)$

$f_x = -2x \Rightarrow f_{xx} = -2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$

3. $f(x,y) = x^2-y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$

E' poi chiaro che se in questa funzione sostituisco $\begin{cases} x-y = \sqrt{2}\,u \\ x+y = \sqrt{2}\,v \end{cases}$ ottengo $g(u,v) = 2uv$ che ha grafico che è solo ruotato del precedente e quindi in $(0,0)$ ha ancora un punto di sella. In questo caso

$g_u = 2v \Rightarrow g_{uu} = 0 \quad g_{uv} = 2$

$g_v = 2u \Rightarrow g_{vu} = g_{uv} = 2 \quad g_{vv} = 0$

Si intuisce quindi che la cosa importante non è il segno della singola derivata seconda, c'è invece un dato che distingue i primi 2 casi dai secondi 2: nel caso 1 e nel caso 2

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} > 0 ;$$

negli altri due casi il verso della disuguaglianza è opposto. In effetti, denotato il determinante $\begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}$

con $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y})$ (<u>Hessiano di f</u>) si dimostra che

TEOR. $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, dotata di derivate parziali 1^e e 2^e continue. <u>Se $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto critico per</u> f (cioè se $(\text{grad} f)(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$)

i) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) < 0$: $(\bar{x},\bar{y})$ non è un estremante

ii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ e $\begin{cases} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ è pto di min. locale forte} \\ f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ " " MAX " "} \end{cases}$

iii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ si deve procedere ad un'analisi ulteriore.

Un <u>punto</u> <u>critico</u> <u>non</u> <u>estremante</u> viene spesso detto "di sella" anche se la funzione non presenta una vera sella. Vedi $f(x,y) = x^3$ nei punti $(0,y)$.

ESEMPIO SPINOSO:

$f(x,y) = (y-x^2)(y-1)^2$. Il sist. $\begin{cases} f_x = -2x(y-1)^2 = 0 \\ f_y = (y-1)(3y-1-2x^2) = 0 \end{cases}$ dà i punti critici:

$(0,1/3)$, $(x,1)$ con x variabile comunque in $\mathbb{R}$.

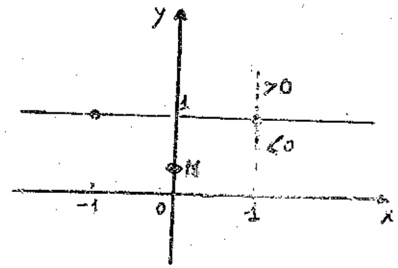
$f_{xx} = -2(y-1)^2$, $f_{xy} = f_{yx} = -4x(y-1)$, $f_{yy} = 6y-4-2x^2$

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} -2(y-1)^2 & -4x(y-1) \\ -4x(y-1) & 6y-4-2x^2 \end{vmatrix} = 4(y-1)^2(x^2-3y+2-4x^2)$$

$\Rightarrow \mathcal{H}_f(0,1/3) = 4(1/3-1)^2(2-1) > 0$: punto estremante

$f_{xx}(0,1/3) = -2(2/3)^2 < 0 \Rightarrow$ MAX locale. VALORE: $4/27$.

Invece $\mathcal{H}_f(x,1) = 0$. Quindi bisogna vedere che cosa succede in un intorno dei vari punti, tenuto conto che $f(x,1) = 0$.



In $(1,1)$ si ha un punto di sella. Infatti $f(1,1+k) = k^2 \cdot k$ >0 se $k>0$, <0 se $k<0$.

Idem in $(-1,1)$: $f(-1,1+k) = k^3 \ldots$

Se $|x|<1$ invece:

$f(x+h,1+k) = k^2(1+k-(x+h)^2)$: se prendo h tale che $|h|$ sia abbastanza piccolo, $|x+h|<1$ e quindi $(x+h)^2<1$; allora se $k>0$ sicuramente $1+k-(x+h)^2>0$; ma anche se prendo $k<0$ ma tale che $k>(x+h)^2-1$ trovo valori positivi: c'è tutto un rettangolo in cui $f(x+h,1+k) \geq f(x,1) = 0 \Rightarrow$ MINIMI LOCALI. Similmente se $|x|>1$: MAX LOCALI

$$f(x,y) = (2y+x^2)(y-x)$$

un esercizio che coinvolge tutte le cose fin qui illustrate

piano tangente in $(-1, 2, f(-1,2))$?

$\text{grad} f = (f_x, f_y)$

$$f_x = 2x(y-x) + (-1)(2y+x^2) = -3x^2 + 2xy - 2y$$

$$f_y = 2(y-x) + (2y+x^2) = x^2 + 4y - 2x$$

$$(\text{grad} f)_{(-1,2)} = \left(-2(2+1) - (4+1),\ 2\cdot 3 + 5\right)$$

$$= (-6-5,\ 11) = (-11, 11)$$

Equazione del piano tang. ha la forma

$$z - f(-1,2) = (-11, 11)\cdot(x+1, y-2)$$

valore della funz. nel punto

$$f(-1,2) = (4+1)(2+1) = 15$$

Eq. piano tangente

$$z - 15 = -11(x+1) + 11(y-2)$$

Derivate seconde?

$$f_{xx} = -6x + 2y$$

$$f_{xy} = 2x - 2$$

$$f_{yx} = (x^2 + 4y - 2x)_x = 2x + 0 - 2$$

sono uguali

$$f_{yy} = (x^2 + 4y - 2x) = 4$$

$$f(x,y) \longrightarrow H = \begin{bmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{bmatrix}$$

matrice Hessiana

$$\mathcal{H}_f = \det H = f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\, f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) - f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\, f_{yx}(\bar{x}$$

Il ruolo dell'**Hessiano** (o meglio del suo segno) è individuare se non esistono (o esistono) sicuramente punti di estremo locale.
Invece il ruolo del segno delle derivate f_{xx} (o f_{yy}), se $\mathcal{H}_f > 0$, è di decidere il tipo di estremo locale.

ATTENZIONE: Se f_x e f_y sono continue, $f_{xy} = f_{yx} \Rightarrow \mathcal{H}_f = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$. Perché $\mathcal{H}_f$ sia positivo, f_{xx} e f_{yy} devono almeno avere lo stesso segno

la funzione $f(x,y) = (2y+x^2)(y-x)$ ha punti critici? ha MAX. MIN?

$$\begin{cases} -3x^2 + 2xy - 2y = 0 \\ x^2 + 4y - 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x^2 + \dfrac{2x-x^2}{2}(x-1) = 0 \\ 2y = \dfrac{2x-x^2}{2} \end{cases}$$

$x=0$ $y=0$ è un punto critico; gli altri sono sol. di $\begin{cases} y = \dfrac{2x-x^2}{4} \\ -6x + (2-x)(x-1) = 0 \end{cases}$

$$H = \begin{bmatrix} -6x+2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-x^2}{4} \\ x^2 - 9x + 3 = 0 \end{cases} \quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{2}$$

y_1 y_2

fatela e ne parliamo.

altri 2 punti critici (x_1,y_1) (x_2,y_2)