Determinare i punti critici di

$f(x,y) = x(y^2-x-1)$

e studiarli.

$\operatorname{grad} f = (0,0)$? risponde alla domanda "quali sono i punti critici?"

$$\begin{cases} f_x = y^2-x-1-x = y^2-2x-1 = 0 \\ f_y = 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=0 \\ y^2=2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2=2x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \quad \begin{matrix}(0,1) \\ (0,-1)\end{matrix}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y^2=2x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \quad \left(-\tfrac{1}{2},0\right)$$

3 punti critici

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{H}| = -4x-4y^2$$

$$\left.\begin{matrix} H(0,1) = -4 < 0 \\ H(0,-1) = -4 < 0 \end{matrix}\right| \Longrightarrow (0,\pm 1) \text{ sono punti di sella}$$

$H\left(-\frac{1}{2},0\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right)$ è un estremante locale

$f_{xx} = -2 < 0$: MAX locale

se $|\mathcal{H}| > 0 \qquad f_{xx} > 0 \iff f_{yy} > 0$

$H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$

(nelle ipotesi f cont.
f_x, f_y continua $\longrightarrow$ Schwartz: $f_{xy} = f_{yx}$
f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} continue)

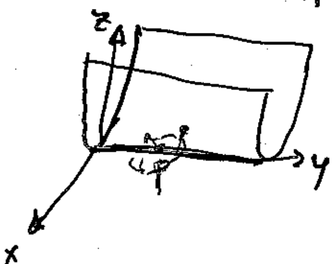
$$H = f_{xx} f_{yy} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{\text{sottraggo } \geq 0} > 0$$

$\Longrightarrow f_{xx} f_{yy} > 0$

segno concorde

Con questa procedura individuo i MAX e i min locali FORTI, non quelli di

$f(x,y) = x^2$



tutti i punti dell'asse y sono minimi locali (e assoluti) ma DEBOLI

$f_x = 2x \qquad f_y = 0 \Longrightarrow$ critici $P = (0,h)$, $h \in \mathbb{R}$

$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ non mi dice nulla. Devo studiare direttamente che cosa succede in un intorno di P

$$f(x,y) = (y-x^3)(y-x) = y^2 - x^3y - xy + x^4$$

Trovare e studiare i punti critici

$$f_x = 4x^3 - 3x^2y - y$$
$$f_y = 2y - x^3 - x$$

$\operatorname{grad} f = (0,0)$

$$\begin{cases} 2y = x^3 + x \\ 2\cdot 4x^3 - 2(3x^2+1)y = 0 \end{cases}$$

per sostituzione

$$\begin{cases} 2y = x^3 + x \\ 8x^3 - (3x^2+1)(x^3+x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = x^3 + x \\ x(8x^2 - 3x^4 - 4x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

il sistema si spezza nei 2 sistemi

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2y = x^3 + x \\ -3x^4 + 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ biquadratica

$$3(x^2)^2 - 4(x^2) + 1 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 = 1 \text{ o } x^2 = \frac{1}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 1 \text{ o } x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ o } x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$\Downarrow$

1° punto critico $(0,0)$

2° " $(1, 2/2) = (1,1)$

3° $(-1,-1)$

4° $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

5° $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$

$$f_{xx} = 12x^2 - 6xy \qquad f_{xy} = -3x^2 - 1$$
$$f_{yx} = -3x^2 - 1 \qquad f_{yy} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 12x^2 - 6xy & -3x^2 - 1 \\ -3x^2 - 1 & 2 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

non è il caso di fare il conto in generale ma di sostituire i valori direttamente

$(0,0)$: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} < 0$ punto di sella

$(1,1)$: $\begin{vmatrix} 12-6 & -3-1 \\ -3-1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 16 < 0$ punto di sella

$(-1,-1)$: $\begin{vmatrix} 12-6 & -3-1 \\ -3-1 & 2 \end{vmatrix}$ uguale

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$: $\begin{vmatrix} 4 - \cancel{6}^{2}\cdot\frac{2}{\cancel{9}3} & -1-1 \\ -1-1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} > 0$ $\Rightarrow$ minimo locale

$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$: $\begin{vmatrix} 4/3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} > 0$ "

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In **cinematica si affronta** il problema: dato un corpo - che a un certo istante iniziale t_0 ha una certa posizione e una certa velocità - sottoposto ad una certa accelerazione, qual è l'equazione del moto?

Es.: $a = 0$ ⇒ moto rettilineo uniforme

$a = \text{cost.}$ ⇒ moto rettilineo uniformemente accelerato

$a = -k^2 s$ ⇒ moto armonico.

Visto che l'accelerazione è la derivata seconda $\ddot{s}$ dello spostamento s, tutte le equazioni scritte coinvolgono la funzione s e le sue derivate (e - anche se in maniera meno palese - il tempo) e sono perciò esempi di equazioni differenziali.

In generale si parla di EQUAZIONE DIFFERENZIALE ogni volta che si ha un'equazione che lega:

- **la** variabile indipendente t
- un certo numero di sue funzioni (eventualmente **costanti**) NOTE
- UNA FUNZIONE $y(t)$ e un certo numero di sue **DERIVATE** da considerare come incognite.

Posso esprimere questo simbolicamente dicendo che l'eq. ha la forma

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

ove F è una funzione di $n+2$ variabili.

L'ordine dell' equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione (: n).

Negli **esempi**: eq. diff. di 2° ordine.

Risolvere un'eq. differenziale significa trovare una funzione $y(t)$ tale che, sostituendo lei e le sue derivate nell'equazione, si trovi un'identità.

In generale l'equazione differenziale da sola non individua univocamente "la soluzione" del problema: questo è il motivo per cui, quando cerco l'equazione del moto di un ben preciso corpo, non mi accontento di dire ad es.:

è sottoposto ad accelerazione nulla

ma do anche le <u>condizioni iniziali</u> relative alla posizione e alla velocità. Anche supponendo di prendere sempre come posizione iniziale

$$s_0 = 0$$

è ben diverso supporre che il corpo abbia una velocità iniziale $v_0 = 1$ m/s piuttosto che $v_0 = -1$ m/s o $v_0 = 0$ m/s !

La famiglia di funzioni che (prescindendo dalle condizioni iniziali) sono soluzione di una certa equazione differenziale prende il nome di

<u>integrale generale dell'eq. diff.</u>

Il problema di stabilire quale delle funzioni di tale famiglia (= <u>soluzione particolare</u>) soddisfa determinate condizioni iniziali prende il nome di PROBLEMA di CAUCHY.

Come sempre quando si parla di equazioni, ci sono due aspetti del problema: la risolubilità e il calcolo effettivo delle soluzioni.

OSS. Perché chiamare integrale generale l'insieme di tutte le funzioni sol. dell'eq. diff.?
Perchè il problema di risolvere eq. diff. è una generalizzazione di un'altro ben noto problema:

$y'(t) = f(t)$ è un'equazione differenziale; risolverla significa trovare tutte le primitive di $f(t)$, cioè calcolare $\int f(t)\,dt$.

E' ben noto che se $f(t)$ è continua le primitive esistono, sono infinite e che se $F(t)$ è una di esse tutte le altre hanno la forma

$$F(t)+c \qquad c \in \mathbb{R}$$

In questo caso posso individuare univocamente la funzione "soluzione particolare" dando la condizione iniziale

$$y(t_0) = y_0 .$$

Trovo infatti $F(t_0) + c = y_0 \implies c = y_0 - F(t_0)$
Quindi in questo caso il problema di Cauchy è risolto dalla funzione $y(t) = F(t) - F(t_0) + y_0$

Equazione di questo tipo è $\ddot{s} = a$, pensata come equazione differenziale in $\dot{s}$:
$\dot{s} = at + c$ è l'integrale generale e se pongo
$\dot{s}(0) = v$ trovo $c = v \implies$ soluzione particolare:
$\dot{s} = at + v$.

A sua volta questa può essere pensata come equazione diff. (dello stesso tipo visto sopra) in s:
$s = \frac{1}{2}at^2 + vt + c$ integrale generale e se $s(0) = 0 \implies$ soluz. particolare $s = \frac{1}{2}at^2 + vt$.

EQ. DIFF. del 1° ordine.

Hanno la forma: $F(t, y(t), y'(t)) = 0$
Ogni funzione $\varphi(t)$ derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e tale che $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ è una soluz
Delle equazioni del 1° ordine quelle che si studiano meglio sono le cosiddette eq. diff. del 1° ordine in FORMA NORMALE:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Per esse vale il seguente teorema (che garantisce la risolubilità del problema di Cauchy):

TEOR. Se $f(t,y)$ e $f_y(t,y)$ sono entrambe continue allorchè t varia in $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ e y varia in $\mathbb{R}$ allora esiste un'unica funzione $y(t)$, definita in un intorno di t_0 e ivi continua e derivabile soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: non è comunque detto che l'integrale sia ricavabile in forma esplicita: in caso negativo si ricorre a metodi di "integrazione approssimata" (Eulero, Runge-Kutta,...).

Noi ci occuperemo di due situazioni in cui l'integrale si ricava in forma analitica e talora esplicita:
- equazioni differenziali a variabili separabili
- equazioni differenziali lineari del 1° ordine.

Ed5

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Siano $a(t)$ e $b(y)$ due funzioni continue rispettivamente su due intervalli I e J di $\mathbb{R}$. Un'eq. diff. del tipo

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

è detta a variabili separabili.

Se $\bar{y}$ è uno ~~radice~~ zero di $b(y)$, la funzione

$$y(t) = \bar{y}$$

è una soluzione.

Su ogni intervallo $J' \subseteq J$ in cui $b(y) \neq 0$ l'eq. diff. si riscrive come

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)\, dt \qquad \left(y'(t) = \frac{dy}{dt} \right)$$

Così abbiamo separato le due variabili y e t.

Allora l'integrale generale – in forma implicita – è dato da

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\, dt + c$$

Perché il problema di Cauchy abbia una e una sola soluzione definita in un intorno di t_0 basterà che $b(y)$ sia derivabile con derivata prima continua in un intorno di $y_0 = y(t_0)$.

Nei nostri esempi funzionerà.

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

a continua in I intervallo di
b " in J "

$\bar{y} \mid b(\bar{y}) = 0$

$\Longrightarrow \bar{y}(t) = \bar{y}$ è una soluzione?

Cioè:

è vero che $y'(t) = 0$ coincide con il valore $a(t)\, b(\bar{y}(t))$ $\forall t$?

$a(t)\, b(\bar{y}) = a(t) \cdot 0 = 0$

$0 = 0$ OK.

$$\boxed{\frac{y'(t)}{b(y(t))}} = a(t)$$

è come se fosse una derivata rispetto a y

$$\int \frac{y'(t)\,dt}{b(y(t))} = \int a(t)\, dt$$

In una reazione chimica tra due reagenti A e B si produce una certa sostanza X.

Chiamiamo: $x(t)$ la concentrazione di X all'istante t;

a la concentrazione di A all'ist. $t=0$

b " " " B " " $t=0$

Sotto opportune ipotesi, si sa che la variazione istantanea della concentrazione di X è proporzionale al prodotto

$$k\ (a-x(t))\ (b-x(t)) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Come posso ricavare $x(t)$?

$$x'(t) = k(a-x(t))(b-x(t))$$

$$x' = k\,(a-x)\,(b-x)$$

$x = x(t)$

Con riferimento alle eq. VAR SEP

$a(t) = k$

$b(x) = (a-x)(b-x)$

Sol. particolari $(a-x)(b-x)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=a \\ x=b \end{matrix}$

Troviamo l'integ. generale:

1°) $a=b$

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \int k\,dt$$

vedi (*) pag successiva

$$\frac{1}{a-x} = kt + c$$

c costante da andare a determinare via probl. di Cauchy

non è in forma esplicita

$$\boxed{a-x = \frac{1}{kt+c}}$$

$$x(t) = a - \frac{1}{kt+c}$$

dove è una primitiva?

Sull'intervallo $\left(-\infty, -\frac{c}{k}\right)$ o

sull'intervallo $\left(-\frac{c}{k}, +\infty\right)$. Particolarizziamo

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$(*)\quad \int \frac{1}{(a-x)^2}\,dx = -\left(\frac{-1}{(a-x)}\right) + c$$

$a-x=t$
$-dx=dt$

$$\int \frac{-1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t} + c$$

$$\begin{cases} a-x = \dfrac{1}{3t+c} \\ x(0)=1 \end{cases}$$

$$a-1 = \frac{1}{3\cdot 0+c}$$

$$c = \frac{1}{a-1}$$

$$\boxed{x(t) = a - \frac{1}{3t + \frac{1}{a-1}}}$$

Se partite da $x(t) = a - \dfrac{1}{3t+c}$
e imponete $x(0)=1$

$$1 = a - \frac{1}{0+c}$$

in generale è più lungo

2°) $a \neq b$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x-(Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\begin{cases} B=-A \\ -(Ab+Ba)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ A(b-a)=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=\dfrac{1}{b-a} \\ A=\dfrac{-1}{b-a} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right) dx = kt + c$$

$$\frac{1}{a-b}\left(\ln|x-a| - \ln|x-b|\right) = kt + c$$

$$\frac{a-b}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = (kt+c)(a-b)$$

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = e^{(a-b)(kt+c)}$$

sol. in forma implicita.

Forma esplicita:
LA PROSSIMA VOLTA